Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 1

УДК 513.73 **МАТЕМАТИКА**

Н. В. ЕФИМОВ, З. Д. УСМАНОВ

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ИЗГИБАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ С ТОЧКОЙ УПЛОЩЕНИЯ

(Представлено академиком П. С. Александровым 17 IV 1972)

Статья посвящена линейной задаче о бесконечно малых изгибаниях поверхности с изолированной точкой уплощения. Поверхность рассматривается локально (в произвольной окрестности этой точки).

Непосредственной целью статьи является изучение вопроса о том, как влияет уплощение поверхности на ее локальную линейную изгибаемость, т. е. на обширность допускаемого ею множества бесконечно малых изгибаний. При этом предполагается, что бесконечно малые изгибания принадлежат некоторому классу регулярности C^m, $2 \leqslant m < \infty$, C^∞ или C^A (принадлежность C^A означает аналитичность). Отметим, что в работе ([1]) доказано существование аналитических поверхностей с точкой уплощения, локально жестких в классе C^A.

В настоящей статье допускаются деформации из более широких классов регулярности C^m, C^∞. Но, с другой стороны, мы ограничиваемся рассмотрением поверхностей вращения

$$z = (x^2 + y^2)^{n/2} \tag{1}$$

в окрестности точки $O(0, 0, 0)$. Здесь n — любое действительное число, $n > 2$. Мы хотим рассмотреть картину возможных явлений хотя бы на этой модельной задаче.

Известно, что среди поверхностей (1) имеются как нежесткие в классе C^A (например, при $n = 4$; см. ([2])), так и локально жесткие в классе C^A (например, при $n = 10$; см. ([3])). В настоящей статье указывается конструкция, которая разделяет все поверхности (1) на два множества: локально жестких и локально нежестких в классе C^A; см. ниже. Первое множество содержит почти все поверхности (1) (второе счетно). Доказывается, что всякая поверхность (1), локально жесткая в классе C^A, является локально жесткой в классе C^∞. Устанавливается, что аналогичное утверждение для класса C^m, $m < \infty$, соблюдается приближенно. Подробные формулировки этих результатов даются дальше.

Условимся говорить, что бесконечно малое изгибание $\{\xi, \eta, \zeta\}$ поверхности (1) принадлежит классу C^q, $q = m$, ∞ или A, если хотя бы только третья его компонента $\zeta = \zeta(x, y)$ принадлежит C^q (при четном натуральном n отсюда последует $\xi, \eta \in C^q$).

Заметим, что бесконечно малое изгибание $\{\xi, \eta, \zeta\}$ является тривиальным, если функция ζ линейна: $\zeta = ax + by + c$. Рассматривая бесконечно малое изгибание с точностью до тривиальной составляющей, обеспечим нормировку: $\zeta(0, 0) = \zeta_x(0, 0) = \zeta_y(0, 0) = 0$. Тогда тривиальные изгибания суть те и только те, для которых $\zeta(x, y) \equiv 0$.

Поверхность (1) назовем локально жесткой в классе C^q, $q = m$, ∞ или A, если для любой окрестности V точки $(0, 0)$ из $\zeta(x, y) \in C^q(V)$ следует $\zeta(x, y) \equiv 0$, $(x, y) \in V$.

Пусть $k \geqslant 3$ — фиксированное целое число и N_k — конечное множество вещественных (рациональных) чисел $n > 2$, которые определяются по формуле

$$n = 2 + 4p\frac{k+p}{k^2-k-2p}, \quad p = 1, 2, \ldots, \frac{k^2-k}{2} - 1. \tag{2}$$

Пусть $N = \bigcup\limits_{k=3}^{\infty} N_k$. Обозначая любую поверхность вида (1) буквой S, будем различать поверхности вида S_0 и вида S_1, для которых соответственно $n \in N$ и $n \notin N$.

Теорема 1. *Поверхности вида S_0 нежестки, а поверхности вида S_1 локально жестки в классе C^A.*

Теорема 2. *Пусть $m \geqslant 2$ — любое натуральное число; тогда для любой поверхности S существуют окрестность точки $(0, 0)$ и нетривиальное бесконечно малое изгибание, которое в этой окрестности принадлежит классу C^m.*

Теорема 3. *Для поверхности вида S_1 бесконечно малое изгибание класса C^m, $m \geqslant 2$, является малой величиной $O(r^{\nu_{k_{n,m}+1}})$ при $r \to 0$, где*

$$\nu_{k_{n,m}+1} = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + (k_{n,m}+1)^2(n-1)} - \frac{n-2}{2}$$

и $k_{n,m}$ определяется из соотношения

$$\sqrt{\frac{m(m+n-2)}{n-1}} - 1 < k_{n,m} \leqslant \sqrt{\frac{m(m+n-2)}{n-1}}.$$

Теорема 3 допускает не только асимптотическое, но и количественное (оценочное) выражение. Именно, справедлива

Теорема 4. *Для поверхности вида S_1 предположим, что $\zeta(x, y) \in C^m$ и что на окружности $r = R$ имеет место оценка $|\zeta| \leqslant M$. Тогда для любой точки $(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi)$, $r < R$,*

$$|\zeta(x, y)| < \frac{4MR}{R-r}\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu_{k_{n,m}+1}}. \tag{3}$$

Теорема 5. *Поверхности вида S_1 локально жестки в классе C^∞.*

Будем пользоваться основным уравнением (см., например, ([4])):

$$z_{yy}\zeta_{xx} - 2z_{xy}\zeta_{xy} + z_{xx}\zeta_{yy} = 0. \tag{4}$$

Напишем уравнение (4) для поверхности (1) и перейдем к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; мы получим

$$r^2\zeta_{rr} + (n-1)r\zeta_r + (n-1)\zeta_{\varphi\varphi} = 0. \tag{5}$$

Пусть U — круговая окрестность точки $(0, 0)$. Предполагая $\zeta(x, y) \in C^2(U)$, разложим $\zeta(x, y)$ в ряд Фурье. Для коэффициентов $A_k(r)$, $B_k(r)$ этого ряда, вследствие уравнения (5), получается система обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрируя ее при условии ограниченности $A_k(r)$, $B_k(r)$ в точке $r = 0$ и с учетом нормировки $\zeta(x, y)$ (см. выше), получим

$$A_0(r) = A_1(r) = B_1(r) = 0,$$

$$A_k(r) = a_k r^{\nu_k}, \quad B_k(r) = b_k r^{\nu_k}, \quad k \geqslant 2,$$

где a_k, b_k — произвольные постоянные и

$$\nu_k = \sqrt{\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 + k^2(n-1)} - \frac{n-2}{2}. \tag{6}$$

Отсюда имеем общее решение

$$\zeta(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi)\, r^{\nu_k}. \tag{7}$$

Замечание. При $n = 2$, когда уплощения нет, $\nu_k = k$ и (7) дает аналитическую функцию.

Доказательство теоремы 2. Каждая гармоника ряда (7) определяет бесконечно малое изгибание поверхности S. Для тех значений k, для которых $\nu_k > m$, соответствующее изгибание принадлежит классу C^m.

Доказательство теоремы 1. Предположим, что при некотором n поверхность (1) в окрестности точки $(0, 0)$ допускает аналитическое изгибание $\{\xi, \eta, \zeta\}$. Пусть

$$\zeta(x, y) = \sum_{m=2}^{\infty} \Phi^{(m)}(x, y),$$

где $\Phi^{(m)}(x, y)$ — однородная форма степени m. Тогда, ввиду специфики уравнения (1), каждая из этих форм есть решение уравнения (4) для поверхности (1). Рассмотрим одну из них и положим $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Получим

$$\Phi^{(m)}(x, y) = r^m f(\varphi), \tag{8}$$

где $f(\varphi)$ — регулярная периодическая функция с периодом 2π.

Из (8) и (5) имеем

$$(n-1)f''(\varphi) + (m^2 - 2m + mn)f(\varphi) = 0. \tag{9}$$

Отсюда

$$m^2 - 2m + mn = k^2(n-1), \tag{10}$$

где k — целое число.

Очевидно, $m < k^2 < m^2$; следовательно, $k \geqslant 3$.

Из (8) и (9)

$$\Phi^{(m)}(x, y) = r^m(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Из (10) найдем $m = \nu_k$. Таким образом, поверхность вида (1) допускает аналитическое бесконечно малое изгибание тогда и только тогда, когда хотя бы одна гармоника ряда (7) является аналитической функцией. Но для этого необходимо и достаточно, чтобы при некотором k было

$$\nu_k = k + 2p, \tag{11}$$

где p — натуральное число. Тогда

$$r^{\nu_k}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = [a_k \operatorname{Re}(x+iy)^k + b_k \operatorname{Im}(x+iy)^k](x^2+y^2)^p.$$

Далее, из (6) $k < \nu_k < k^2$; из (11) $0 < p < {}^1/_2(k^2 - k)$. Отсюда после совместного решения (6) и (11) относительно n найдем (2). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть поверхность относится к виду S_1. Тогда (11) невозможно. При этом условии, если $\zeta(x, y) \in C^m$, $m \geqslant 2$, то в выражении (7) $a_2 = b_2 = \ldots = a_{k_{n,m}} = b_{k_{n,m}} = 0$, где натуральное число $k_{n,m}$ определяется неравенствами $\nu_{k_{n,m}} \leqslant m < \nu_{k_{n,m}+1}$. Следовательно, $\zeta = O(r^{\nu_{k_{n,m}+1}})$.

Доказательство теоремы 4. При условии теоремы 4 из формул, определяющих коэффициенты Фурье, имеем для ряда (7)

$$|a_k|,\ |b_k| < 2M / R^{\nu_k}.$$

Отсюда и вследствие $\zeta(x, y) \in C^m$ имеем из (7)

$$|\zeta(x, y)| < 4M\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu_{k_{n,m+1}}} \sum_{k_{n,m+1}}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{\nu_k - \nu_{k_{n,m+1}}}. \tag{12}$$

Из (12) с учетом неравенства $\nu_{k+p}-\nu_k \geqslant p$ получаем оценку (3).

Доказательство теоремы 5. Для круговой окрестности точки (0, 0) имеем $\zeta(x, y) \equiv 0$ вследствие $\zeta(x, y) \in C^\infty$ и теоремы 4 (или теоремы 3). Но тогда $\zeta(x, y) \equiv 0$ в любой окрестности, так как, ввиду эллиптического характера задачи вне точки (0, 0), функция $\zeta(x, y)$ аналитична во всех точках $(x, y) \neq (0, 0)$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
Отдел математики с вычислительным центром
Академии наук ТаджССР
Душанбе

Поступило
7 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Ефимов, ДАН, **60**, № 5, 761 (1948). [2] Р. Я. Берри, УМН, **7**, 3 (49), 125 (1952). [3] R. I. Hoesli, Compositio Mathematica, 8, fasc 2 (1950). [4] Н. В. Ефимов, УМН, **3**, в. 2 (24), 47 (1948).