

УДК 519.4:517:513.88

МАТЕМАТИКА

В. В. ЖИКОВ

ПРИНЦИП УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ГЛАВНЫМ ЧЛЕНОМ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 11 IV 1972)

В настоящей заметке даны основные положения принципа усреднения на всей оси для параболических уравнений общего вида (включая нелинейную теорию и некоторые критические случаи).

Проблема усреднения на всей оси (и конечном отрезке) для параболических уравнений поставлена довольно давно. Р. З. Хасьминский ⁽³⁾ получил глубокие результаты для линейных уравнений второго порядка, применив теоретико-вероятностные методы. После этого существенных продвижений в задаче усреднения на всей оси не последовало *, что можно объяснить характером этой задачи и прежде всего тем, что в общей постановке она не поддается решению классическими методами Н. Н. Боголюбова (см. замечание 1). Не описывая сейчас наши методы, укажем только на два решающих обстоятельства: во-первых, это результаты из ⁽¹⁾ о достаточных условиях экспоненциальной дихотомии и, во-вторых, это систематическое применение оценок типа Нэша для квазилинейных параболических уравнений ⁽²⁾ **.

Напомним ⁽¹⁾, что если B — банахово пространство, J — числовая ось, то $C = C(B, J)$ — банахово пространство непрерывных ограниченных функций $J \rightarrow B$. Основным нашим объектом в линейном случае будут операторы L вида $L = d/dt + A(t)$. Операторы семейства L_ε мы называем равномерно регулярными, если для всякого $f \in C$ уравнение $L_\varepsilon u = f$ имеет единственное решение $u_\varepsilon \in C$ и $\|u_\varepsilon\|_C \leq k\|f\|_C$ (постоянная k не зависит от ε). Мы начнем с рассмотрения коэрцитивных краевых задач для сильно параболических уравнений любого порядка. Это будет сделано в форме так называемого абстрактного параболического уравнения. Получающаяся здесь линейную теорию можно считать вполне точной. Однако подход к параболическим уравнениям на основе исключительно гильбертовых пространств («вариационный» метод) представляется недостаточным для нелинейных задач. Это приводит к необходимости изучения уравнений второго порядка специфическими для них средствами.

1. Абстрактное параболическое уравнение. Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y) , H_1, H_2 — гильбертовы пространства с вполне непрерывными вложениями $H_1 \subset H \subset H_2$, причем H_1 и H_2 взаимно сопряжены относительно H .

Введем обозначения: V — пространство линейных операторов $H_1 \rightarrow H_2$ с операторной нормой, E_i , $i = 1, 2$ — пространства измеримых H_i -значных

функций $u(t)$ с нормой $\|u\|_{E_i}^2 = \sup_{t \in J} \int_0^1 \|u(t+s)\|_{H_i}^2 ds$, $W = C(H, J) \cap E_1$,
 $\|u\|_W = \|u\|_C + \|u\|_{E_1}$.

* Задача на конечном отрезке изучалась в ^(7, 8) (см. ⁽⁴⁾). В настоящей работе этот вопрос отдельно не рассматривается.

** В задаче усреднения могут иметь значение только такие априорные оценки, которые не зависят от модулей непрерывности коэффициентов по аргументу t .

Пусть $A(t)$ есть непрерывная ограниченная, устойчивая по Пуассону ⁽¹⁾ функция в V и выполнены условия:

$$1) \operatorname{Re} (A(t)x, x) \leq c_1 \|x\|_{H_1}^2 - c_2 \|x\|_H^2, \quad x \in H_1, \quad t \in J,$$

2) предел $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\alpha}^{T+\alpha} A(t) dt = \bar{A}$ существует в V и достигается равномерно по $\alpha + J^*$.

Положим $L^\omega = d/dt + A(\omega t)$, $\bar{L} = d/dt + \bar{A}$. Первый шаг принципа усреднения на J должен состоять в том, чтобы из регулярности $\bar{L}$ вывести регулярность L^ω при больших ω . Так как для $\bar{A}$ имеет место неравенство 1), то уравнение $\bar{A}x + \lambda x = g$ однозначно разрешимо в H при больших $\lambda > 0$. Этим определяется $\bar{A}$ (мы сохраняем обозначение) как неограниченный оператор в H . Условие регулярности состоит в том, что $\bar{A}$ не имеет спектра на мнимой оси.

Теорема 1. Если $\bar{L}$ регулярен, то L^ω , $\omega \geq \omega_0$, равномерно регулярны. Более того, область значений L^ω совпадает с E_2 и

$$\|u\|_W \leq c \|L^\omega u\|_{E_2}, \quad \omega \geq \omega_0. \quad (1)$$

Схема доказательства этой теоремы такова. Сначала (с использованием регулярности $\bar{L}$, условия 2) и некоторых соображений компактности) устанавливается оценка (1); в терминологии ⁽¹⁾ это значит, что L^ω корректно разрешимы. Но тогда регулярность дается теоремой 2 из ⁽¹⁾. Условие устойчивости по Пуассону нужно только на этом последнем шаге. Принципиальный вопрос о том, можно ли снять это условие, остался нерешенным. Но следует отметить один важный случай, когда это так: когда $\bar{L}$ не просто регулярен, а устойчив.

Замечание 1. Возникает вопрос, можно ли отбросить условие коэрцитивности 2), заменив его коэрцитивностью $\bar{A}$? Ответ отрицательный, как показывает следующий пример.

Пусть $-A(t) = a(t)\Delta$ ($a(t)$ — скалярная функция, Δ — оператор Лапласа); рассматривается первая краевая задача в конечной области. Предположим, что $m(a) = \bar{a} > 0$ и $a(t)$ принимает значения с разными знаками. Тогда можно показать, что операторы L^ω не являются регулярными ни при каком ω .

Этот пример поучителен еще и в следующем отношении. При попытке доказательства теоремы 1 классическими методами Н. Н. Боголюбова ⁽⁴⁻⁶⁾ возникают некоторые неформальные трудности. Приведенный пример показывает, что эти трудности заведомо непреодолимы**.

Замечание 2 (о критических случаях). Некоторые критические случаи могут быть изучены принципиально тем же способом, что и некритический. Мы ограничимся формально простейшим из них. Пусть имеет оператор $L_\varepsilon = d/dt + A_1(t/\varepsilon) + \varepsilon A_2(t/\varepsilon)$, где A_1, A_2 непрерывны и ограничены в V , A_1 удовлетворяет условиям 1), 2), причем $A_1(t) = A_1(-t)$. Для простоты будем считать, что A_1 есть тригонометрический многочлен с коэффициентами $C_i \in V$. Положим $R = (\bar{A}_1 + \lambda_0 I)^{-1}$. Допустим, что $\bar{A}_1$ имеет на мнимой оси единственное простое нулевое собственное значение, e_0 — собственный вектор, g_0 — аналогичный вектор для $\bar{A}_1^*$. Дополнительно

* В таких случаях мы говорим о равномерном среднем и пишем $\bar{A} = m(A)$. Устойчивость по Пуассону и свойство 2) имеют место, если, например, $A(t)$ есть почти периодическая функция в V .

** Метод Боголюбова и его модификации основаны исключительно на том, что «возмущение» $A(\omega t) - \bar{A}$ интегрально мало ⁽⁶⁾. Но и условия теоремы 1, и условия примера обеспечивают интегральную малость в норме V . Остается, может быть, выражение, что интегральную малость нужно измерять в более сильной норме. Но это означает, что в $A(t)$ «главный» член постоянен — в этом случае классические методы приводят к цели. Например, достаточно, чтобы $A(t) - \bar{A}$ была компактной функцией в подпространстве $V_0 \subset V$, состоящем из вполне непрерывных отображений $H_1 \rightarrow H_2$.

по предположим некоторые условия гладкости и вещественности, а именно: операторы $\bar{A}_2 R, C, C_1 R^2$ существуют и ограничены в H , а $\bar{A}_1 + \varepsilon \bar{A}_2$ самосопряжены относительно операции комплексного сопряжения в H . Тогда, если $(\bar{A}_2 e_0, g_0) \neq 0$, то L_ε регулярен и $\|u\|_W \leq (k/\varepsilon) \|L_\varepsilon u\|_{E_2}$.

Приведем теперь основное следствие теоремы 1, которое собственно и составляет принцип усреднения.

Рассмотрим нелинейное уравнение $u' + F(u, t) = 0$, где $F(x, t)$, $t \in J$, есть непрерывное преобразование $H_1 \rightarrow H_2$. Допустим, что имеется такой

элемент $x_0 \in H_1$, для которого $m(F(x_0, t)) = 0$. Пусть на элементе x_0 оператор $F: H_1 \rightarrow H_2$, $t \in J$, дифференцируем и соответствующий оператор линейного приближения $L^0 = d/dt + F_x'(x_0, \omega t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Допустим еще, что оператор $\Phi(u) = F(u(t), t)$ действует из W в E_2 и в некоторой W -окрестности элемента x_0 непрерывно дифференцируем.

Следствие 1. Существует единственное решение u^0 такое, что $\|u^0 - x_0\|_W \rightarrow 0$. Это решение условно экспоненциально устойчиво в H равномерно по начальному значению и параметру $\omega \geq \omega_0$ (подробнее ⁽⁵⁾, стр. 461) *.

К сожалению, следствие 1 не может дать полной нелинейной теории применительно к сильно параболическим уравнениям. Причина — недифференцируемость достаточно общего нелинейного дифференциального оператора как оператора из W в E_2 . Таким образом, линейный анализ далеко не исчерпывает всей проблемы. Эти трудности удается преодолеть для уравнений второго порядка за счет оценок типа Нэша.

2. Уравнения второго порядка. Пусть Ω — ограниченная область в R^m с достаточно гладкой границей Γ , $D = \bar{\Omega} \times J$. Рассмотрим задачу Дирихле для линейного уравнения

$$L^0 u = u_t - M(\omega t)u = f - \partial f_i / \partial x_i = g,$$

где $M(t)u = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{ij} u_{x_j} + a_i u) - b_i u_{x_i} - a u$. Пусть $C(D)$ есть совокупность непрерывных ограниченных на D функций, имеет место равномерная параболичность, коэффициенты $M(t)$ принадлежат $C(D)$, устойчивы по Пуассону в $C(\bar{\Omega})$ и имеют здесь равномерные средние. Пусть $\bar{L}$ регулярен в $H = L_2(\Omega)$.

Теорема 2. Для любых $f, f_i \in C(D)$, существует единственное решение $u^0 \in C(D)$, причем $\|u^0\|_{C(D)} \leq k \{ \|f\|_{C(D)} + \sum \|f_i\|_{C(D)} \}$.

Положим $\bar{f} = m(f)$, $\bar{f}_i = m(f_i)$, $g^0 = g(t\omega)$.

Следствие 2. Если $\bar{M}\bar{u} = \bar{g}$, $L^0 u^0 = g^0$, то $\|u^0 - \bar{u}\|_{C(D)} \rightarrow 0$.

Это утверждение было получено Р. З. Хасьминским ⁽³⁾ при дополнительных ограничениях, из которых наиболее существенное $a(x, t) \geq 0$. Как отмечалось выше, при условии $\bar{a} \geq 0$ устойчивость по Пуассону не требуется.

Перейдем теперь к нелинейным уравнениям **. Сначала мы исключим влияние границы и рассмотрим компактное многообразие без края. Для определенности изучим периодическую (по пространственным переменным) задачу для общего уравнения в дивергентной форме

* Следствие 1 применимо к двумерному уравнению Навье — Стокса в конечной области; нужные свойства дифференцируемости по существу доказаны в ⁽⁹⁾. Принцип усреднения доказан нами и в трехмерном случае, но уже не энергетическим методом.

** Ясно, что идеальной для построения нелинейной теории является такая ситуация, когда есть дифференцируемость и для оператора линейного приближения имеются равномерные по ω точные оценки. В абстрактной трактовке нет дифференцируемости, а для уравнений второго порядка — точных оценок. В этом заключены, конечно, все трудности нелинейной теории.

$$u_t - M(\omega t)u = 0, \quad (2)$$

где $M(t)u = \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(t, x, u, u_x)) + b(t, x, u, u_x)$.

Пусть S — основной куб, $D = S \times J$ и выполнены условия

$$1) \quad v \sum \xi_i^2 \leq \frac{\partial a_i(t, x, u, p)}{\partial p_j} \xi_i \xi_j \leq \mu \sum \xi_i^2, \quad v, \mu > 0;$$

2) функции a_i и b вместе с первыми производными соответственно по x, u, p и u, p принадлежат $C(D)$ и непрерывно зависят в нем от u, p ;

3) a_i, b устойчивы по Пуассону в $C(S)$ и имеют здесь равномерные средние (равномерно по u, p из компактов).

Допустим, что усредненное эллиптическое уравнение имеет классическое решение $\bar{u}(x)$, для которого оператор первого линейного приближения не имеет спектра на мнимой оси.

Теорема 3. Уравнение (2) имеет единственное решение $u^*(t, x)$ такое, что $\|u^* - \bar{u}\|_{C(S_t)} \rightarrow 0$. Это решение условно экспоненциально устойчиво в $C(S)$.

В случае задачи Дирихле нужны некоторые ограничения на поведение коэффициентов вблизи границы. Положим $\alpha_i = \frac{\partial a_i}{\partial p}(t, x, \bar{u}, \bar{u}_x)$, $\beta = \frac{\partial b}{\partial p}(t, x, \bar{u}, \bar{u}_x)$. Пусть Γ_ε — некоторая окрестность Γ , $\varepsilon_0 > 0$ и выполнены неравенства

$$\left| \frac{\partial a_i}{\partial p} - \alpha_i \right| + \left| \frac{\partial b}{\partial p} - \beta \right| \leq \lambda_0, \quad \left| \frac{\partial a_i}{\partial u} \right|^{m+2} + \left| \frac{\partial a_i}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial b}{\partial u} \right|^{(m+2)/2} \leq \lambda_1(1 + |p|^2),$$

где $x \in \Gamma_\varepsilon$, $|u - \bar{u}| \leq \varepsilon_0$, $t \in J$, $p \in R^m$. Тогда, если величина λ_0 достаточно мала, то теорема 3 имеет место для задачи Дирихле.

Отметим, наконец, что наши методы применимы не только к задачам в конечной области, но и к задаче Коши в классе ограниченных функций, а также к проблеме усреднения для эллиптических уравнений как в цилиндре, так и во всем пространстве.

Примечание при корректуре. Условие устойчивости по Пуассону нам удалось снять как в теоремах 1–3, так и во всех других утверждениях, относящихся к параболическим и эллиптическим уравнениям. Это достигнуто с помощью новых теорем, гарантирующих регулярность линейного оператора L при условии его корректной разрешимости.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Жиков, ДАН, 205, № 6 (1972). ² О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», 1967. ³ Р. З. Хасьминский, Теория вероятн. и ее приложения, 8, в. 1 (1963). ⁴ Ю. М. Митропольский, Принцип усреднения в нелинейной механике, Киев, 1971. ⁵ Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, «Наука», 1970. ⁶ М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов, Нелинейные почти-периодические колебания, «Наука», 1970. ⁷ С. Д. Эйдельман, Сибирск. матем. журн., 3, № 1 (1962). ⁸ И. Б. Симоненко, Матем. сборн., 81, № 1 (1970). ⁹ О. А. Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, «Наука», 1970.