

О. А. ЛЕВЧЕНКОВ

МАТРИЧНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УРАН-СВИНЦОВЫХ И УРАН-ТОРИЙ-СВИНЦОВЫХ ИЗОХРОН

(Представлено академиком Д. С. Коржинским 3 XI 1971)

В практике геохронологии вычисление возраста открытых уран-торий-свинцовых систем минералов и горных пород производится обычно методами, предусматривающими построение изохрон на графиках $Pb^{206}/U^{238} - Pb^{207}/U^{235}$ и $Pb^{208}/Th^{232} - Pb^{207}/U^{235}$ по экспериментальным точкам, в координаты которых предварительно введена поправка на обыкновенный свинец ⁽¹⁾. В работе ⁽²⁾ описан метод, позволяющий найти параметры U — Pb изохроны без предварительной корреляции на обыкновенный свинец путем интерполирования по Pb^{204}/U^{238} между экспериментальными точками на графике

$$Pb_{изм}^{206}/U^{238} = Pb_{изм}^{207}/U^{235}.$$

Так как уравнение, определяющее положение точки на U — Pb-графике:

$$Pb_{изм}^{206}/U^{238} = b \cdot Pb_{изм}^{207}/U^{235} + Pb^{204}/U^{238} \cdot (Pb_0^{206}/Pb^{204} - 137,8 \cdot b \cdot Pb_0^{207}/Pb^{204}) + a, \quad (1)$$

или в других обозначениях

$$v = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad (2)$$

является линейным ⁽²⁾, то для нахождения параметров U — Pb изохроны можно применить математический аппарат линейной алгебры.

Для m экспериментальных точек составляется система линейных уравнений вида

$$v_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3, \quad (3)$$

$$\vdots$$

$$v_m = a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3.$$

Коэффициенты преобразования (3) образуют прямоугольную матрицу с размерами $m \times n$:

$$A_{mn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{vmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, m; k = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Вычисление значений x_1, x_2, x_3 производится по схеме, приведенной в работе ⁽³⁾.

1. Находим определитель произведения двух матриц:

$$|G| = A^T A, \quad (5)$$

где A^T — матрица, транспонированная по отношению матрицы A .

2. Записываем матрицу, обратную для произведения $A^T A$:

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{|G|} (A^T A). \quad (6)$$

3. Составляем матричное уравнение

$$X = (A^T A)^{-1} V, \quad (7)$$

которое является решением преобразования (3), где X и V — столбцовые матрицы, составленные соответственно из неизвестных x_k и свободных членов v_i :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_m \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Преобразование (3) имеет единственное решение при условии, что определитель (G) не равен нулю, т. е. столбцы в матрице (4) должны быть линейно-независимыми. Это обстоятельство обязывает до решения преобразования (3) производить вычисление коэффициентов корреляции между столбцами матрицы (4). Средние квадратичные ошибки определения неизвестных x_k рассчитываются по формуле

$$\sigma_{x_k} \approx \frac{m}{m-n} \sqrt{N_{kk} \frac{\sum \varepsilon \varepsilon}{m-n}}, \quad (10)$$

где N_{kk} — диагональный элемент матрицы (6), $m-n$ — разность между числом строк и столбцов, ε — отклонение функции измеренных величин от ее истинного значения.

Т а б л и ц а 1

Вид графика	Расчетные величины	Минералы Беломорья (6, 8, 9)	Цирконы из Little Belt (7)
График Везе- рилла	Возраст образования (t_1), млн лет	1950 ± 50	1935 ± 40
	Время метаморфизма (t_2), млн лет	300	170 ± 50
$\frac{Pb_{изм}^{206}}{U^{238}} / \frac{Pb_{изм}^{207}}{U^{235}}$	r ($Pb_{изм}^{207}/U^{235}$; Pb^{204}/U^{235})	0,85	0,88
	b	0,0627 ± 0,0022	0,0616 ± 0,0009
	a	0,008 ± 0,010	0,018 ± 0,004
	Возраст образования (t_1), млн лет	1880 ± 65	1860 ± 40
	Время метаморфизма (t_2), млн лет	0—200	200 ± 45
$\frac{Pb_{изм}^{207}}{U^{235}} \approx \frac{Pb_{изм}^{206}}{U^{238}}$	r' ($Pb_{изм}^{206}/U^{238}$; Pb^{204}/U^{235})	0,48	0,72
	b'	15,90 ± 0,57	16,26 ± 0,23
	a'	0,007 ± 0,009	0,019 ± 0,003
	Возраст образования (t_1'), млн лет	1880 ± 70	1850 ± 35
	Время метаморфизма (t_2'), млн лет	0—200	200 ± 50
$\frac{Pb_{изм}^{208}}{Th^{232}} / \frac{Pb_{изм}^{207}}{U^{235}}$	r'' ($Pb_{изм}^{207}/U^{235}$; Pb^{204}/U^{235})		0,88
	r'' ($Pb_{изм}^{207}/U^{235}$; Pb^{204}/Th^{232})		—0,64
	r'' (Pb^{204}/U^{235} ; Pb^{204}/Th^{232})		0,87
	b''		0,0197 ± 0,0064
	a''		—0,020 ± 0,030
	Возраст образования (t_1''), млн лет		2015

Уравнение изохроны в системе координат $\text{Pb}_{\text{изм}}^{208} / \text{Th}^{232} - \text{Pb}_{\text{изм}}^{207} / \text{U}^{235}$ имеет вид $\text{Pb}_{\text{изм}}^{208} / \text{Th}^{232} = b'' \text{Pb}_{\text{изм}}^{207} / \text{U}^{235} + \text{Pb}^{204} / \text{Th}^{232} \cdot \text{Pb}_0^{208} / \text{Pb}^{204} - \text{Pb}^{204} / \text{U}^{235} \cdot b'' \text{Pz}_0^{207} / \text{Pb}^{204} + a''$, или

$$v_1 = a''_{11}x_1 + a''_{12}x_2 + a''_{13}x_3 + a''_{14}x_4. \quad (11)$$

При соблюдении допущений относительно геохимической модели $\text{U} - \text{Th} - \text{Pb}$ -системы, рассмотренных в работе (4), (11) является линейным уравнением. Для m экспериментальных точек можно составить преобразование вида (3), коэффициенты которого при неизвестных x_k'' образуют матрицу на порядок выше матрицы (4). Нахождение неизвестных x_k'' производится по вышеприведенной схеме вычислений.

Предлагаемый способ расчетов был применен для определения возраста минералов Беломорья (3, 6) и цирконов из Little Belt (Moutana) (7) (табл. 1).

В связи с тем, что между $\text{Pb}_{\text{изм}}^{207} / \text{U}^{235}$ и $\text{Pb}^{204} / \text{U}^{235}$ отмечается более тесная корреляционная связь (r), чем между $\text{Pb}_{\text{изм}}^{206} / \text{U}^{238}$ и $\text{Pb}^{204} / \text{U}^{238}$ (r'), были рассчитаны изохроны как в системе координат $\text{Pb}_{\text{изм}}^{206} / \text{U}^{238} - \text{Pb}_{\text{изм}}^{207} / \text{U}^{235}$, так и в $\text{Pb}_{\text{изм}}^{207} / \text{U}^{235} - \text{Pb}_{\text{изм}}^{206} / \text{U}^{238}$. Несмотря на различие между r и r' , вычисленные значения t_1 и t_2 по двум изохронам практически совпадают. Значение возраста (t_1''), определенное по $\text{U} - \text{Th} - \text{Pb}$ -изохроне несколько выше датировки, полученной по $\text{U} - \text{Pb}$ -графику. Однако $t_1'' = 2015$ млн лет для цирконов хорошо согласуется со значением возраста 2000 млн лет по $\text{U} - \text{Th} - \text{Pb}$ -изохроне, приведенным в работе (4). Большие средние квадратичные ошибки параметров $\text{U} - \text{Th} - \text{Pb}$ -изохроны, по-видимому, объясняются тем, что реальная геохимическая история образцов была более сложной в сравнении с теоретическими моделями развития $\text{U} - \text{Th} - \text{Pb}$ -систем, рассмотренными в работе (4).

Предлагаемый способ расчета позволяет определить параметры изохрон без введения поправки на обыкновенный свинец, отличается быстротой расчета, относительно простым и удобным для переложения на язык ЭВМ математическим аппаратом.

Институт геологии и геохронологии докембрия
Академии наук СССР
Ленинград

Поступило
18 VIII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. W. Wetherill, Trans. Am. Geophys. Union, 37, 3, 320 (1956). ² О. А. Левченков, Ю. А. Щуколюков, Геохимия, 1, 88 (1970). ³ М. Г. Напазов, С. Г. Могильный, Теория ошибок и способ наименьших квадратов, М., 1968. ⁴ C. J. Allegre, Earth Planet. Sci. Letters, 2, 1, 57 (1967). ⁵ К. К. Жиров, С. И. Зыков и др., Геохимия, 8, 657 (1957). ⁶ И. Е. Старик, Ф. Е. Старик и др., Тр. IV сессии комис. по определению абсолютного возраста геол. формаций, 1957, стр. 83. ⁷ E. J. Catanzaro, J. L. Kulp, Geochim. et cosmochim. acta, 28, 87 (1963). ⁸ Э. Е. Герлинг, Геохимия, 4, 287 (1958).