

А. И. БАШКИРОВ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ СВОИМИ ПОДПРОСТРАНСТВАМИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 10 IV 1972)

В последнее время интенсивно изучаются классы пространств, топология которых полностью определяется подпространствами более простой природы; таковыми являются k -пространства, квази- k -пространства, секвенциальные, s -пространства и другие. В настоящей заметке дается общая схема такого построения. Большинство аналогичных результатов для k -пространств доказаны А. В. Архангельским⁽¹⁾, для секвенциальных С. П. Франклином^(5, 6), но наши доказательства намного прозрачнее, так как совершенно не используют конкретную структуру базисных пространств.

1. Вспомогательные утверждения. Если на множестве X задано покрытие γ топологическими пространствами $(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)$, то на X существует максимальная (она будет наибольшей, а потому единственной) топология $\mathcal{T}_X(\gamma)$, ограничения которой на элементы покрытия мажорируются исходными топологиями: $\mathcal{T}_X(\gamma)|_\Gamma \subseteq \mathcal{T}_\Gamma^*$. Ее можно определить так: $\mathcal{T}_X(\gamma) = \{U: U \cap \Gamma \in \mathcal{T}_\Gamma \text{ для всякого } \Gamma \in \gamma\}$ **. Например, если покрытие γ дизъюнктно, то $\mathcal{T}_X(\gamma) = \bigoplus \mathcal{T}_\Gamma$; если каждое $\Gamma = X$, то $\mathcal{T}_X(\gamma) = \bigcap \mathcal{T}_\Gamma$. Если вместо исходного покрытия $\gamma = \{(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)\}$ взять $\gamma' = \{(\Gamma, \mathcal{T}_X(\gamma)|_\Gamma)\}$, то топологии $\mathcal{T}(\gamma)$ и $\mathcal{T}(\gamma')$ совпадут.

Определим оператор псевдозамыкания F_ξ относительно покрытия γ : $F_1(M) = \bigcup \{[\Gamma \cap M]_{\mathcal{T}_\Gamma}: \Gamma \in \gamma\}$. Тогда множество M замкнуто в $\mathcal{T}(\gamma)$ в том и только том случае, если $F_1(M) = M$. Трансфинитным процессом определяем оператор F_ξ так: если ξ изолированный, то $F_\xi(M) = F_1(F_{\xi-1}(M))$; если ξ предельный, то $F_\xi(M) = \bigcup_{\eta < \xi} F_\eta(M)$. Первый трансфинит ξ , на кото-

ром процесс стабилизируется (это заведомо наступит при $|\xi| > |M|$, причем тогда $F_\xi(M) = [M]_{(\mathcal{T}_\gamma)}$), называется рангом покрытия γ : $r(\gamma) = \xi$.

Теорема 1. Пусть $f: (X, \mathcal{T}(X)) \rightarrow (Y, \mathcal{T}(Y))$ — отображение.

Тогда 1) Если f факторное, то $\mathcal{T}_X = \mathcal{T}(f\gamma)$, где $f\gamma = \{(f\Gamma, \mathcal{T}_\gamma|_{f\Gamma}): \Gamma \in \gamma\}$.

2) Если f псевдооткрыто ***, то $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(f\gamma)$ и $r(f\gamma) \leq r(\gamma)$.

3) Если $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(f\gamma)$ и $f|_\Gamma$ факторное для каждого $\Gamma \in \gamma$, то f также факторное.

4) Если $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}(f\gamma)$, $f|_\Gamma$ псевдооткрыто для каждого $\Gamma \in \gamma$ и $r(f\gamma) = 1$, то f псевдооткрыто.

Теорема 2. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — (многозначное) отображение.

Тогда: 1) Отображение f непрерывно в $(\mathcal{T}_X(\gamma), \mathcal{T}_Y)$ тогда и только тогда, когда $f|_\Gamma$ непрерывно для каждого $\Gamma \in \gamma$.

2) Отображение замкнуто в $(\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y(\gamma))$ тогда и только тогда, когда $f|_{f^{-1}\Gamma}$ замкнуто для каждого $\Gamma \in \gamma$.

* Аналогичное утверждение для двойственного понятия уже неверно.

** Ср. со слабой топологией относительно покрытия⁽¹²⁾.

*** Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется псевдооткрытым, если выполнено одно из следующих эквивалентных друг другу условий: а) Для всякой окрестности $O_{f^{-1}y}$ полного прообраза любой точки $y \in Y$ всегда $y \in \text{Int } [O_{f^{-1}y}]$. б) Для всякого $Y' \subset Y$ $f|_{f^{-1}Y'}: f^{-1}Y' \rightarrow Y'$ факторное. в) Если $y \in [B]$, то $f^{-1}y \cap [f^{-1}B] \neq \emptyset$ ^(1, 2).

Теорема 3. Для покрытия $\gamma = \{(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma)\}$ топологического пространства $(X, \mathcal{T}_X)$ рассмотрим естественное отображение $\varphi_\gamma: \oplus(\Gamma, \mathcal{T}_\Gamma) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$.

Тогда условия *па* и *пб* эквивалентны:

- 1а) Отображение φ_γ непрерывно.
- 1б) Ограничение $\varphi_\gamma|_\Gamma$ является уплотнением для каждого $\Gamma \in \gamma$.
- 2а) Отображение φ_γ факторное.
- 2б) $\mathcal{T}_X(\gamma) = \mathcal{T}_X$.
- 3а) Отображение φ_γ псевдооткрыто.
- 3б) $\mathcal{T}_X(\gamma) = \mathcal{T}_X$ и $r(\gamma) = 1$.

2. Общая теория. Покрытие $\sigma = \{S\}$ топологического пространства $(X, \mathcal{T})$ называется определяющим (ранга ξ), если $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\sigma)$, где $\sigma = \{(S, \mathcal{T}|_S)\}$ ($r(\sigma) = \xi$). Так, всякие замкнутые наследственно консервативные, замкнутые локально конечные, открытые покрытия являются определяющими (ранг последних двух равен 1). Если $\sigma = \{S\}$ — определяющее покрытие $(X, \mathcal{T})$ ранга ξ , а σ_S — определяющее покрытие $(S, \mathcal{T}|_S)$ ранга ξ_S , то покрытие пространства $\cup \sigma_S$ является определяющим ранга $\leq \xi \times \sup \xi_S$.

Если покрытия σ и σ' таковы, что для каждого $S \in \sigma$ найдется $S' \in \sigma'$ такой, что $S' \supseteq S$, то σ' определяющее ранга $\leq \xi$, если таково σ ; в частности, если для каждого элемента некоторого определяющего покрытия существует элемент, дизъюнктивный с ним, то дополнительное покрытие будет определяющим того же ранга.

Зафиксируем некоторый класс $\mathcal{K}$ топологических пространств (одноточечное пространство принадлежит $\mathcal{K}$). Для каждого пространства X через $\sigma_X(\mathcal{K})$ обозначим все подпространства X класса $\mathcal{K}$. Скажем, что $X \in h\mathcal{K}$, если $\sigma_X = 2^X$; $X \in l\mathcal{K}$, если открытые ядра σ_X образуют базу топологии $\mathcal{T}_X$; $X \in \mathcal{K}_\infty$, если σ_X определяющее покрытие; $X \in \mathcal{K}_\xi$, если σ_X определяющее и $r(\sigma_X) \leq \xi$; $X \in FU$, если X пространство Фреше — Урысона. Ясно, что $h\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \subseteq l\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_\xi \subseteq \mathcal{K}_\infty$, кроме того, если $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}'' \subseteq \mathcal{K}_\infty$, то $FU \cap \mathcal{K}_\infty \subseteq h(\mathcal{K}_1) = h\mathcal{K}'' \subseteq \mathcal{K}_1 = \mathcal{K}'_1 \subseteq \mathcal{K}_\xi = \mathcal{K}'_\xi \subseteq \mathcal{K}_\infty = \mathcal{K}_\infty''$.

Теорема 4. Условия 1—4 и 5—6 эквивалентны:

- 1) $X \in \mathcal{K}_\xi$.
- 2) Существует покрытие $\sigma = \{S\}$ пространства X элементами класса $\mathcal{K}_\xi$: $S \in \mathcal{K}_\xi$ такое, что $\text{Int } \sigma = \{\text{Int } S: S \in \sigma\}$ — также покрытие.
- 3) Существует открытое покрытие пространства X элементами $\mathcal{K}_\xi$.
- 4) Существует замкнутое локально конечное покрытие пространства X элементами $\mathcal{K}_\xi$.
- 5) $X \in \mathcal{K}_\infty$.
- 6) Существует замкнутое наследственно консервативное покрытие пространства X элементами $\mathcal{K}_\infty$.

Теорема 5. Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно перехода к замкнутым (открытым) подпространствам, то и классы $\mathcal{K}_\xi$ таковы; кроме того классы $\mathcal{K}_\xi$ замкнуты относительно перехода к открытым регулярно вложенным подпространствам*.

Семейство σ подмножеств X из класса $\mathcal{K}$ называется $\mathcal{K}$ -базой, если для всякого $S \in \sigma_X(\mathcal{K})$ найдется $S' \in \sigma$, содержащий S . Минимум мощностей $\mathcal{K}$ -баз называется $\mathcal{K}$ -весом ($\mathcal{K}wX$); $\mathcal{K}wX = 1$ тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{K}$. Из всякой $\mathcal{K}$ -базы можно выбрать $\mathcal{K}$ -базу мощности $\mathcal{K}wX$. Всякая $\mathcal{K}$ -база пространства X класса $\mathcal{K}_\xi$ ($X \in \mathcal{K}_\xi$) является образующим покрытием ранга $\leq \xi$. Отображение $f: X \rightarrow Y$ пространства X класса $\mathcal{K}_\infty$ (на пространство Y класса $\mathcal{K}_\infty$) непрерывно (замкнуто), если оно непрерывно на элементах некоторой $\mathcal{K}$ -базы X (замкнуто на полных прообразах элементов некоторой $\mathcal{K}$ -базы Y).

* Открытое множество U регулярно вложено в X , если для всякой точки $x \in U$ найдется окрестность V_x , лежащая в U с замыканием $[V_x] \subseteq U$.

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется $X\mathcal{K}$ -($Y\mathcal{K}$)-отображением, если $f^{-1}\sigma_Y(\mathcal{K}) \equiv \sigma_X(\mathcal{K})$ ($f\sigma_X(\mathcal{K}) \equiv \sigma_Y(\mathcal{K})$). Отображение, являющееся одновременно $X\mathcal{K}$ -отображением и $Y\mathcal{K}$ -отображением, называется $\mathcal{K}$ -отображением. Если $f\sigma_X(\mathcal{K}) \equiv \sigma_Y(\mathcal{K})$, то отображение f называется $\mathcal{K}$ -накрывающим. При $X\mathcal{K}$ -($Y\mathcal{K}$)-отображениях образ (прообраз) $\mathcal{K}$ -базы является $\mathcal{K}$ -базой; поэтому $\mathcal{K}$ -вес не увеличивается (не уменьшается) при $X\mathcal{K}$ -($Y\mathcal{K}$)-отображениях.

Если класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно перехода к непрерывному образу и произведению в числе сомножителей $\leq m$, то $\mathcal{K}w \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \leq \prod_{\alpha \in A} \mathcal{K}w X_\alpha$, $|A| \leq m$.

Под $\mathcal{K}$ -лидером X пространства X понимаем множество X с топологией $\mathcal{T}_{\sigma_X(\mathcal{K})}$: $(X, \mathcal{T}_{\sigma_X(\mathcal{K})}) = X$. Тожественное отображение $\psi_X: X \rightarrow X$ является уплотнением, а ограничения на элементы σ_X — гомеоморфизмами, значит, $\mathcal{K}$ -лидер принадлежит классу $\mathcal{K}_\infty$. В предположении, что класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно уплотнений, $\mathcal{K}$ -лидер является наименьшим (а потому единственным) пространством класса $\mathcal{K}_\infty$, уплотняющимся на X , а ψ_X является $\mathcal{K}$ -уплотнением; если же $\mathcal{K}$ замкнут при переходе к непрерывным образам, то переход к $\mathcal{K}$ -лидеру функториален*. В этом случае класс $\mathcal{K}_\infty$ ($\mathcal{K}_\pm$) замкнут относительно перехода к факторному (псевдооткрытому) образу и $\mathcal{K}_\infty$ ($\mathcal{K}_\pm$) совпадает с классом факторных (псевдооткрытых) образов $\mathcal{L}\mathcal{K}$.

Через $C(X, Y)$ обозначим пространство непрерывных отображений в $\mathcal{K}$ -открытой топологии. Отображение $f: X \rightarrow Y$ индуцирует взаимно однозначное отображение $F: C(Y, Z) \rightarrow C(X, Z)$, которое непрерывно (открыто), если f — $Y\mathcal{K}$ -отображение ($\mathcal{K}$ -накрывающее). Аналогично работе Н. Е. Стипроды⁽⁹⁾ можно строить теорию категории класса $\mathcal{K}_\infty$.

3. Примеры и частные теоремы. Если класс $\mathcal{K}$ состоит соответственно из одноточечного пространства, T_1 -пространств, пространств мощности $\leq m$, то $\mathcal{K}_\infty = \mathcal{K}_1$ состоит из дискретных пространств, T_1 -пространств, пространств тесноты $\leq m$, а топология $\mathcal{K}$ -лидера дискретна, $\mathcal{T}_{\tilde{X}} = \mathcal{T}_X \vee \mathcal{C}^{**}$, тесноты $\leq m$.

Особенный интерес представляют пространства, обобщающие секвенциальные; m -секвенциальные, $k(m)$ -пространства, m -квази- k -пространства, исходными классами $\mathcal{K}$ для которых служат соответственно пространства веса $\leq m$, бикомпакты веса $\leq m$, m -компактные пространства***. По-видимому, все результаты о секвенциальных пространствах переносятся на тот или иной класс таких пространств. Заметим, что класс m -секвенциальных пространств совпадает с $\mathcal{K}_{\omega(m^+)}$.

Теорема 6. Для регулярного пространства X эквивалентны следующие утверждения:

- 1) X локально m -компактно.
- 2) $\iota_X \times g$ факторное для всякого факторного g с m -секвенциальным прообразом.
- 3) $\iota_X \times g$ факторное для всякого замкнутого k -накрывающего отображения g с прообразом — паракомпактным $k(m)$ -пространством.
- 4) Для всякого $k(m)$ -пространства Y произведение $X \times Y$ m -квази- k -пространство.
- 5) Для всякого паракомпактного $k(m)$ -пространства Y произведение $X \times Y$ квази- k -пространство.

Теорема 7. Для регулярного $k(m)$ -пространства X эквивалентны следующие утверждения:

- 1) X локально m -компактно.
- 2) Для всякого $k(m)$ -пространства Y произведение $X \times Y$ — $k(m)$ -пространство.

* Т. е. если $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, то и $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ непрерывно.

** $\mathcal{C}$ — коконечная топология.

*** Введены другим способом П. Мейером⁽⁷⁾.

3) Для всякого паракомпактного $k(\mathfrak{m})$ -пространства произведение $X \times Y$ — квази- k -пространство*.

Теорема 8**. Пусть $\chi X_\alpha \leq \mathfrak{m}$, тогда $\Sigma_m(\prod X_\alpha)$ $\mathfrak{m}$ -Фреше — Урысона, где $\chi X_\alpha = \sup \{\chi(x, X) : x \in X\}$,

$$\Sigma_m(\prod X_\alpha) = \{x = (x_\alpha) \in \prod X_\alpha : |\{\alpha : x_\alpha \neq x_\alpha^\circ\}| \leq \mathfrak{m}\}.$$

Теорема 9. Для всякого пространства X эквивалентны:

- 1) X локально бикompактно.
- 2) Для всякого локально бикompактного пространства Y произведение $X \times Y$ — k_1 -пространство.
- 3) $X \times D^{\mathfrak{m}}$ — k_1 -пространство, где $\mathfrak{m} = \exp |X|$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, Тр. Московск. матем. общ., **13**, 3 (1965). ² А. В. Архангельский, ДАН, **153**, № 4 (1963). ³ А. П. Комбаров, ДАН, **205**, № 5 (1972). ⁴ D. E. Cohen, Quart. J. Math., (2), **5**, 77 (1954). ⁵ S. P. Franklin, Fund. Math., **57**, № 1, 107 (1965). ⁶ S. P. Franklin, Fund. Math., **61**, № 1, 51 (1967). ⁷ P. R. Meyer, Coll. Math., **22**, № 2, 223 (1971). ⁸ E. Michael, Ann. Inst. Fourier, **18**, № 2, 281 (1968). ⁹ N. Noble, Trans. Am. Math. Soc., **149**, № 1, 187 (1970). ¹⁰ N. E. Steenrod, Michigan Math. J., **14**, № 2, 133 (1967). ¹¹ Y. Tanaka, Proc. Japan. Acad., **46**, № 10, 1074 (1970). ¹² J. Dugunji, Topology, 1966.

* Теоремы 6 и 7 для секвенциальных и k -пространств доказаны Д. Козном (⁴) Э. Майклом (⁸) и И. Танака (¹¹). Для первого следствия ($1 \Rightarrow 2$) нужно воспользоваться небольшой модификацией леммы 4 А. П. Комбарова (³), остальные импликации почти дословно повторяют (⁸).

** Счетный случай доказан Н. Ноблом (⁹).