

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

А. И. КАРДАШ, И. И. ЧУЛЫК

ОБ ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ РЯДА ДИРИХЛЕ ФУНКЦИИ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ И ЕГО МАЖОРАНТЫ НЬЮТОНА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 6 III 1972)

1. Пусть рассматривается функция двух комплексных переменных, представленная рядом

$$f(z, w) = \sum_{k, l=0}^{\infty} a_{kl} \exp(\mu_k z + \nu_l w), \quad (1)$$

где $0 \leq \mu_0 < \mu_1 < \dots \rightarrow \infty$, $0 \leq \nu_0 < \nu_1 < \dots \rightarrow \infty$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\mu_k} = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\ln l}{\nu_l} = 0, \quad a_{00} \neq 0,$$

сходящимся в полной трубчатой области $(^1, ^2)$

$$T_B = B + iR^2 = \{(z = x + iu, w = y + iv) \in C^2: (x, y) \in B\}.$$

Обозначим через r_1, r_2 сопряженные, а через c_1, c_2 максимальные абсциссы сходимости ряда (1) по z и w соответственно. Числа r_1, r_2 удовлетворяют соотношению $(^2, ^3)$

$$\overline{\lim}_{k, l \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_{kl}| + \mu_k r_1 + \nu_l r_2}{\mu_k + \nu_l} = 0. \quad (2)$$

Если c_1, c_2 конечные, то

$$B \subseteq B_c = \{(x, y): x < c_1, y < c_2\}. \quad (3)$$

Для сходимости ряда (1) в области T_B , где B удовлетворяет условию (3), необходимо и достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{k, l=0}^{\infty} a_{kl} d_{kl}(B) \exp(\mu_k z + \nu_l w) \quad (4)$$

сходился в области T_{B_0} , где $B_0 = \{(x, y): x < 0, y < 0\}$, а

$$d_{kl}(B) = \sup_{(x, y) \in B} \exp(\mu_k x + \nu_l y),$$

в чем можно убедиться, используя $(^4)$.

2. Пусть $E_f = \{(\mu_k, \nu_l): a_{kl} \neq 0\}$, $\bar{Q}_f$ — выпуклая оболочка множества E_f . Для каждой точки $(\mu_k, \nu_l) \in E_f$ построим в пространстве R^3 переменных μ, ν, λ точку $P_{kl}(\mu_k, \nu_l, -\ln |a_{kl}|)$. Через Φ обозначим выпуклую оболочку множества всех точек P_{kl} . Пусть далее

$$\kappa(\mu, \nu) = \inf_{(\mu, \nu, \lambda) \in \Phi} \lambda;$$

тогда выпуклую поверхность $\mathfrak{D}_f$, описываемую уравнением

$$\lambda = \kappa(\mu, \nu), \quad (\mu, \nu) \in \bar{Q}_f, \quad (5)$$

назовем диаграммой Ньютона ряда (1).

Теорема 1. Функция $\kappa(\mu, \nu)$ определена на множестве $\bar{Q}_f$ тогда и только тогда, когда максимальные абсциссы сходимости ряда (1) удовлетворяют условиям $c_1 > -\infty$, $c_2 > -\infty$.

Введем функцию $T(\mu, \nu) = \exp(-\kappa(\mu, \nu))$, определенную и непрерывную на $\bar{Q}_f$. Ряд

$$\mathfrak{M}_f(z, w) = \sum_{k, l=0}^{\infty} T_{kl} \exp(\mu_k z + \nu_l w), \quad (6)$$

где $T_{kl} = T(\mu_k, \nu_l)$, назовем мажорантой Ньютона ряда (1). При этом $|a_{kl}| \leq T_{kl}$.

Обозначим через $E_{\mathfrak{M}_f}$ множество всех точек вида $(\mu_k, \nu_l) \in \bar{Q}_f$. Присоединим к $E_{\mathfrak{M}_f}$ точку $(0, 0)$. Рассмотрим в плоскости $\mu\nu$ множество прямых вида $\mu + \nu = s$, $s \geq 0$, проходящих через точки $(\mu_k, \nu_l) \in E_{\mathfrak{M}_f}$ и пересекающих координатные оси в точках $(s_n, 0)$ и $(0, s_n)$, где $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots \rightarrow \infty$.

Введем вспомогательный ряд

$$g(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sum_{s_k + s_l = s_n} \exp(s_k z + s_l w), \quad (7)$$

где $b_n = \max_{\mu_k + \nu_l = s_n} |a_{kl}|$ и его мажоранту Ньютона

$$\mathfrak{M}_g(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \sum_{s_k + s_l = s_n} \exp(s_k z + s_l w). \quad (8)$$

При этом $b_n \leq t_n$. Рассмотрим также ряд

$$\psi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp s_n w. \quad (9)$$

При пересечении диаграммы Ньютона $\mathfrak{D}_g$ ряда (7) с плоскостями $\mu\lambda$ или $\nu\lambda$ получим диаграмму $\mathfrak{D}_\psi$ функции $\psi(z)$ или $\psi(w)$ соответственно. В частности, ряд

$$\mathfrak{M}_\psi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \exp s_n w \quad (10)$$

является мажорантой Ньютона ряда (9) ⁽⁵⁾.

Лемма. Для всех k, l, n , связанных соотношением $\mu_k + \nu_l = s_n$, имеет место неравенство

$$|a_{kl}| \leq T_{kl} \leq t_n. \quad (11)$$

Теорема 2. Если ряд Дирихле (1) сходится в области T_n , то его мажоранта Ньютона $\mathfrak{M}_f$ сходится в той же области.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что если ряд (1) сходится в области T_{B_r} , где

$$B_r = \{(x, y): x < r_1, y < r_2\},$$

а r_1, r_2 — сопряженные абсциссы сходимости ряда (1), то ряд (6) также сходится в области T_{B_r} .

Пусть ряд (1) сходится в области T_{B_0} . Тогда

$$\overline{\lim}_{k, l \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_{kl}|}{\mu_k + \nu_l} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln b_n}{s_n} = 0, \quad (12)$$

откуда вытекает, что ряд (7) сходится в T_{B_0} . При этом ряды (9) и (10) сходятся при $\operatorname{Re} w < 0$ ⁽⁶⁾, откуда вытекает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln t_n}{s_n} = 0. \quad (13)$$

Из (11) — (13) вытекает, что $\overline{\lim}_{k, l \rightarrow \infty} \frac{\ln T_{kl}}{\mu_k + \nu_l} = 0$, т. е. ряд (6) сходится в T_{B_0} .

Пусть теперь ряд (1) сходится в T_{B_r} , тогда ряд

$$\tilde{f}(z, w) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \tilde{a}_{kl} \exp(\mu_k z + \nu_l w), \quad (14)$$

где

$$\tilde{a}_{kl} = a_{kl} d_{kl}(B_r) = a_{kl} \exp(\mu_k r_1 + \nu_l r_2),$$

сходится в T_{B_0} . Согласно доказанному мажоранта Ньютона ряда (14)

$$\mathfrak{M}_{\tilde{f}}(z, w) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \tilde{T}_{kl} \exp(\mu_k z + \nu_l w)$$

сходится в T_{B_0} . Учитывая, что $\tilde{T}_{kl} = T_{kl} \exp(\mu_k r_1 + \nu_l r_2)$, ряд (6) сходится в области T_{B_r} . Теорема доказана.

Пусть функция $f(z, w)$, изображаемая рядом (1), является целой. С помощью леммы доказывается

Теорема 3. Если ряд Дирихле (1) является целой функцией, то и его мажоранта Ньютона есть целая функция.

Пусть целая функция $f(z, w)$, представленная рядом Дирихле (1), имеет конечный порядок и тип. Тогда справедлива

Теорема 4. Порядки и типы целых функций $f(z, w)$ и $\mathfrak{M}_f(z, w)$, представленных рядами Дирихле (1) и (6), совпадают.

3. Пусть c_1, c_2 конечные. Используя формулы

$$c_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\kappa(t, 0)}{t}, \quad c_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\kappa(0, t)}{t}$$

и учитывая выпуклость функции $\kappa(\mu, \nu)$, получим

$$\frac{\kappa[(1-q)t, qt]}{t} \leq (1-q)c_1 + qc_2 \quad (15)$$

для всех $t > 0$ и $q \in [0, 1]$. Тогда из (15) вытекает

Теорема 5. Если c_1, c_2 конечные, то для всех $q \in [0, 1]$ существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\kappa[(1-q)t, qt]}{t} = \chi(q).$$

Из выпуклости функции $\kappa(\mu, \nu)$ вытекает также выпуклость функции $\chi(q)$ на промежутке $[0, 1]$. Тогда $\chi(q)$ непрерывна на $[0, 1]$ и дифференцируема почти всюду на $(0, 1)$ (7).

Рассмотрим семейство образующих, определяемое уравнениями

$$\lambda = (\mu + \nu)\chi(q),$$

$$(1-q)\nu = q\mu.$$

Исключая параметр q , получим уравнение

$$\lambda = F(\mu, \nu) \equiv (\mu + \nu) \chi\left(\frac{\nu}{\mu + \nu}\right),$$

описывающее в пространстве R^3 выпуклую коническую поверхность с вершиной в начале координат и угловым коэффициентом образующей

$$h(q) = \frac{\chi(q)}{V(1-q)^2 + q^2}.$$

Обозначим эту поверхность через $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}_f}$. Поверхность $\mathfrak{D}_{\mathfrak{A}_f}$ является асимптотическим конусом выпуклого множества $\mathfrak{D}_f$ (8-10). Легко видеть, что

$$F(\mu, \nu) \equiv (\mu + \nu) F\left(\frac{\mu}{\mu + \nu}, \frac{\nu}{\mu + \nu}\right),$$

т. е. если $\mu = (1-q)t$, $\nu = qt$, то $\chi(q) \equiv F(1-q, q)$. Частные производные $\partial F / \partial \mu$, $\partial F / \partial \nu$ зависят только от отношения $\nu / (\mu + \nu)$. При

$\mu = (1 - q)t$, $v = qt$ производные $dF/d\mu$, $\partial F/\partial v$ имеют соответственно вид $F - qF'_q$ и $F + (1 - q)F'_q$, где $F \equiv F(1 - q, q)$, $F'_q = dF/dq$. Поверхность $\mathfrak{D}_{\mathfrak{F}}$ является диаграммой Ньютона ряда

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{F}}(z, w) = \sum_{k, l=0}^{\infty} \exp(u_k z + v_l w - F(u_k, v_l)). \quad (16)$$

4. Пусть $F'_q{}^+$ и $F'_q{}^-$ — соответственно правая и левая производные функции F в точке q . Обозначим через M интервал $(0, 1)$, а через m — множество точек разрыва функции F'_q .

Множеству $M \setminus m$ поставим в соответствие в плоскости xu множество точек (x, y) , где

$$x = F - qF'_q, \quad y = F + (1 - q)F'_q. \quad (17)$$

Множеству m поставим в соответствие множество точек (x, y) , лежащих на прямой

$$(1 - q)x + qy = F, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} F - qF'_q{}^+ &\leq x \leq F - qF'_q{}^-, \\ F + (1 - q)F'_q{}^- &\leq y \leq F + (1 - q)F'_q{}^+. \end{aligned} \quad (19)$$

В случае $q = 0$, $q = 1$ получим, в частности,

$$x = c_1, \quad y \leq c_1 + F_0^+, \quad (20)$$

$$y = c_2, \quad x \leq c_2 - F_1^-. \quad (21)$$

Таким образом, всем $q \in [0, 1]$ ставится в соответствие кривая

$$\varphi(x, y) = 0, \quad (22)$$

определяемая уравнениями (17) — (21).

Для любых $q \in M \setminus m$ и $\tilde{q} \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$F(1 - q, q) - F(1 - \tilde{q}, \tilde{q}) + (\tilde{q} - q)F'_q \leq 0, \quad (23)$$

причем равенство имеет место, если $\tilde{q} = q$, а также для всех $\tilde{q} \in [q_1, q_2]$ в случае, если F линейна на $[q_1, q_2]$. В последнем случае значениям $q \in [q_1, q_2]$ соответствует одна точка на кривой (22).

Используя (2), (15) и (23) устанавливаем справедливость следующих теорем

Теорема 6. Числа x, y , удовлетворяющие уравнению (22), являются сопряженными абсциссами сходимости ряда (16).

Теорема 7. Области сходимости рядов Дирихле (1) и (16) совпадают.

Полученные результаты обобщаются на случай n переменных и произвольной полной трубчатой области T_n .

В заключение выражаем искреннюю благодарность проф. А. Н. Костовскому за постановку задачи и руководство, а также проф. А. А. Гольдбергу за ценные замечания.

Львовский государственный университет
им. И. Франко

Поступило
6 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. С. Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.
- ² В. П. Громов, Сибирск. матем. журн., **10**, № 3, 522 (1969).
- ³ Artemiades Nikolas, Bull. sci. math., **77**, 48 (1953).
- ⁴ Л. А. Айзенберг, Б. С. Митягин, Сибирск. матем. журн., **1**, № 2, 153 (1960).
- ⁵ О. М. Костовский, Г. Г. Цегелик, Вісник Львів. унів., сер. мех.-мат., в. 6, 36 (1971).
- ⁶ Г. Г. Цегелик, Тез. докл. Всесоюз. конфер. по теории функций комплексного переменного, Харьков, 1971, стр. 232.
- ⁷ Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, М., 1948.
- ⁸ R. T. Rockafeller, Trans. Am. Math. Soc., **123**, № 1, 46 (1966).
- ⁹ Л. С. Маергойз, Тез. докл. Всесоюз. конфер. по теории голоморфных функций многих комплексных переменных, Красноярск, 1969, стр. 27.
- ¹⁰ І. І. Чулик, Вісник Львів. унів., сер. мех.-мат., в. 7, 69 (1972).