

УДК 517.535.4+517.432.1

МАТЕМАТИКА

В. Н. ЛОГВИНЕНКО

ДВУЧЛЕННАЯ АСИМПТОТИКА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 27 I 1972)

Целые функции, встречающиеся в анализе, имеют, как правило, определенную регулярность в расположении корней, которая обычно выражается в наличии у множества корней угловой плотности. Следуя ⁽¹⁾, стр. 118, мы говорим, что множество корней целой функции $f(z)$ имеет угловую плотность с показателем $\rho(r)$, $\rho(r)$ — уточненный порядок, если для всех значений θ_1 и θ_2 , за исключением, быть может, счетного множества, существует предел

$$\Delta(\theta_1, \theta_2) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-\rho(t)} n(t, \theta_1, \theta_2).$$

Здесь $n(t, \theta_1, \theta_2)$ — функция распределения корней целой функции $f(z)$, равная числу корней $f(z)$, попавших в сектор $\{z: 0 < |z| \leq t; \theta_1 \leq \arg z < \theta_2\}$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 2\pi$.

Величина $\Delta(\omega)$, равная $\Delta(0, \omega)$ при $\omega \in [0, 2\pi]$ и определяемая равенством $\Delta(\omega) = \Delta(\omega - 2\pi) + \Delta(2\pi)$ при $\omega \notin [0, 2\pi]$, называется угловой плотностью множества корней $f(z)$ с показателем $\rho(r)$. В приложениях весьма важно, что наличие у множества корней целой функции угловой плотности влечет особую регулярность роста этой функции. Эта связь дается следующей теоремой Б. Я. Левина — А. Пфлюгера ⁽¹⁾, стр. 120): пусть $\rho(r)$ — некоторый уточненный порядок, причем $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r)$ — нецелое число, и пусть множество корней канонического произведения $f(z)$ имеет угловую плотность $\Delta(\omega)$ с показателем $\rho(r)$. Тогда имеет место соотношение

$$\ln |f(re^{i\theta})| = H(\theta)r^{\rho(r)} + \psi(re^{i\theta}),$$

где

$$H(\theta) = \frac{\pi}{\sin \rho\pi} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} \cos \rho(\theta - \omega - \pi) d\Delta(\omega),$$

а функция $\psi(re^{i\theta}) = o(r^{\rho(r)})$ при $r \rightarrow \infty$, если только точка $z = re^{i\theta}$ не принадлежит некоторому редкому исключительному множеству, а именно, S^0 -множеству в смысле ⁽¹⁾, стр. 120.

Известно, что исключительное S^0 -множество в этой теореме состоит из точек «понижения» ⁽¹⁾, стр. 150).

Часто в приложениях о множестве корней целой функции $f(z)$ известно больше, чем существование угловой плотности $\Delta(\omega)$. Представляется интересным получить в этом случае более точное, нежели в теореме Б. Я. Левина — А. Пфлюгера, описание асимптотического поведения $f(z)$. Это составляет содержание следующих двух теорем.

Теорема 1. Пусть для функции $n(t, \theta_1, \theta_2)$ распределения корней канонического произведения $f(z)$ имеет место соотношение

$$n(t, \theta_1, \theta_2) = \Delta_1(\theta_1, \theta_2)t^{\rho_1} + \Delta_2(\theta_1, \theta_2)t^{\rho_2} + \varphi(t, \theta_1, \theta_2),$$

причем $1 > \rho_1 > \rho_2 > \frac{2}{3}\rho_1$, а для функции $\varphi(t, \theta_1, \theta_2)$ равномерно по θ_1 и θ_2 выполняется асимптотическая оценка

$$\varphi(t, \theta_1, \theta_2) = o(t^{3\rho_2 - 2\rho_1}), \quad t \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тогда справедливо соотношение

$$\ln |f(re^{i\theta})| = H_1(\theta)r^{\rho_1} + H_2(\theta)r^{\rho_2} + \psi(re^{i\theta}).$$

Здесь

$$H_j(\theta) = \frac{\pi}{\sin \rho_j \pi} \int_{\theta - 2\pi}^{\theta} \cos \rho_j(\theta - \omega - \pi) d\Delta_j(\omega), \quad j = 1, 2,$$

где $\Delta_j(\omega) = \Delta_j(\theta, \omega)$ при $\omega \in [0, 2\pi]$, а для значений $\omega \notin [0, 2\pi]$ функция $\Delta_j(\omega)$ определяется равенством $\Delta_j(\omega) = \Delta_j(\omega - 2\pi) + \Delta_j(2\pi)$. Для функции $\psi(re^{i\theta})$ равномерно по θ выполняется асимптотическая оценка

$$\psi(re^{i\theta}) = o(r^{\rho_2}), \quad r \rightarrow \infty,$$

если только точка $z = re^{i\theta}$ не принадлежит исключительному множеству E , которое на каждом луче $\arg z = \theta$ высекает открытое множество нулевой относительной меры. Кроме того, при любом $q > 1$ справедлива оценка

$$\sup_0^{2R} \int_R^r |\psi(re^{i\theta})|^q dr = o(R^{\rho_2 q + 1}), \quad R \rightarrow \infty. \quad (2)$$

Теорема 2. Если в формулировке теоремы 1 условие (1) заменить условиями

а) $\varphi(t, \theta_1, \theta_2) = o(t^{\rho_2}), \quad t \rightarrow \infty$;

б) при некотором $q_1 > 1$ равномерно по α выполняется асимптотическая оценка

$$\int_{\alpha - 2\pi}^{\alpha} \int_R^{2R} |\varphi(t, \alpha - 2\pi, \theta)|^{q_1} dt d\theta = o(R^{(3\rho_2 - 2\rho_1)q_1 + 1}), \quad R \rightarrow \infty,$$

то заключение теоремы 1 остается верным, за исключением того, что оценка (2) верна теперь лишь при $q = q_1$.

Если дополнительно потребовать, чтобы функции $\Delta_1(\omega)$ и $\Delta_2(\omega)$ удовлетворяли условию Липшица, то можно считать, что исключительное множество E в этих теоремах состоит из счетного объединения колец $C_k = \{z: r_k < |z| < r'_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{r_k \leq R} (r'_k - r_k) = o(R), \quad R \rightarrow \infty.$$

Кроме того, в этом случае асимптотическую оценку (2) можно заменить более сильной

$$\int_R^{2R} \sup_0^r |\psi(re^{i\theta})|^q dr = o(R^{\rho_2 q + 1}), \quad R \rightarrow \infty.$$

Основные трудности при доказательстве этих теорем связаны с тем, что исключительное множество E не обязательно состоит только из точек «понижения». Следовательно, становится неприменимой теорема об оценке модуля голоморфной функции снизу ((¹), стр. 33), на которой основывалось доказательство теоремы Б. Я. Левина — А. Пфлюгера. Метод доказательства теорем 1 и 2 близок методу, использованному в теории сингуляр-

ных интегралов ⁽²⁾. Кроме того, мы используем известные теоремы о максимуме Харди — Литтлвуда ⁽³⁾. Прежде чем формулировать теоремы, составляющие сущность этого метода, дадим необходимые определения.

Пусть функция $f \in L^p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$. Определим функции

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt, \quad \operatorname{Im} z > 0, \quad \hat{F}(r) = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} |F(re^{i\theta})|,$$

понимая под $F(r)$ и $F(-r)$ угловые предельные значения $F(z)$. Точно так же по функции $\sigma(t)$ ограниченной вариации на оси определяются функции

$$\Sigma(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z}, \quad \operatorname{Im} z > 0; \quad \hat{\Sigma}(r) = \sup_{0 \leq \theta \leq \pi} |\Sigma(re^{i\theta})|.$$

Теорема 3. Для любого $p \in (1, \infty)$ существует такая постоянная $C_p < \infty$, что для любой функции $f \in L^p(-\infty, \infty)$ справедливо неравенство

$$\|\hat{F}\|_{L^p(0, \infty)} \leq C_p \|f\|_{L^p(-\infty, \infty)}.$$

Теорема 4. Существует такая постоянная $C < \infty$, что каковы бы ни были функция $\sigma(t)$ ограниченной вариации на оси и число $h > 0$ выполняется неравенство

$$\operatorname{mes}\{r : r \geq 0; \hat{\Sigma}(r) > h\} \leq C \operatorname{Var}_{-\infty}^{\infty} \{\sigma\}/h.$$

Автор выражает глубокую благодарность Б. Я. Левину и И. В. Островскому за ценные замечания по работе.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
11 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, 1956. ² A. P. Calderon, A. Zygmund, Acta Math., 88, 1, 85 (1952). ³ G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Acta Math., 54, 3—4, 81 (1930).