

Е. В. ВОРОНОВСКАЯ

О ФУНКЦИОНАЛАХ С ЧЕБЫШЕВСКОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 27 I 1972)

В монографии ⁽¹⁾, стр. 53, была упомянута задача, разрешением которой мы здесь займемся. Будем пользоваться выводами и терминами нашей теории без повторных пояснений.

Напомним: если $F = (\mu_i)_0^n$; (a) — отрезок-функционал, то введены обозначения $F(P_n) = P_n(\bar{\mu}) = P_n(\bar{a})$; $T_n(x) = \cos n \arccos(2x - 1)$.

Задача состоит в следующем. Дано: $\alpha_0 > 0$; построить при $n = \text{const}$ аморфный отрезок $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ так, чтобы его интервал наилучшего продолжения $[\alpha_n', \alpha_n'']$ совпадал с критическим интервалом $[\mu_n', \mu_n'']$.

Заметим: для любого аморфного базиса $(\alpha_i)_{i=0}^{n-1}$ имеет место $\mu_n' \leq \alpha_n' < \alpha_n'' \leq \mu_n''$. Если обозначить $\alpha_n'' - \alpha_n' = A_n$; $\mu_n'' - \mu_n' = L_n$, то условие $A_n = L_n$ равносильно совпадению интегралов.

Теорема 1. *Необходимое и достаточное условие для $A_n = L_n$ в аморфном базисе $(\alpha_i)_{i=0}^{n-1}$ есть $A_n = \alpha_0 / 2^{2n-2}$.*

Составим три отрезка-функционала

$$\begin{matrix} \alpha_n'', \\ \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \end{matrix} \quad (1)$$

$$\begin{matrix} \alpha_n', \\ \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \end{matrix} \quad (2)$$

$$0_0, 0_1, \dots, 0_{n-1}, A_n. \quad (3)$$

Норма отрезка (3) есть $A_n \cdot 2^{2n-1} = 2\alpha_0$, $A_n = \alpha_0 / 2^{2n-2}$.

1) Пусть $A_n = L_n$; тогда $\alpha_n'' = \mu_n''$, $\alpha_n' = \mu_n'$; $T_n(\overline{(1)}) = \alpha_0$, $-T_n(\overline{(2)}) = \alpha_0$; и норма для (3) есть $2\alpha_0 = A_n \cdot 2^{2n-1}$.

2) Пусть $A_n = \alpha_0 / 2^{2n-2}$; тогда норма (3) есть $2\alpha_0$, так как $T_n(\overline{(1)}) \leq \alpha_0$ и $T_n(\overline{(2)}) \leq \alpha_0$. Но $\pm T_n(x)$ — экстремальный полином для (1) и (2) соответственно. Для получения нормы, равной $2\alpha_0$, $T_n(x)$ должен быть экстремальным и для (3); отсюда следует $\alpha_n'' = \mu_n''$ и $\alpha_n' = \mu_n'$, т. е. $A_n = L_n$.

Следствие 1. Если $A_n = L_n$, то $T_n[\overline{(1) + (2)}] = 0$.

Следствие 2. Пусть для $(\alpha_i)_{i=0}^{n-1}$ выполнено условие $A_n = L_n$. Для отрезка-функционала $(\gamma) = \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$, x при $\alpha_n' \leq x \leq \alpha_n''$ прямые $T_n(\overline{(\gamma)})$ и $-T_n(\overline{(\gamma)})$ пересекаются на оси иксов в точке $1/2(\alpha_n' + \alpha_n'')$.

Теорема 2. Если для $(\alpha_i)_{i=0}^{n-1}$ имеет место $A_n = L_n$, то необходимо $\alpha_{n-1} = 1/2(\alpha_{n-1}' + \alpha_{n-1}'')$.

Значение α_{n-1} при заданных предшествующих параметрах вполне определяет и α_n' и α_n'' ⁽¹⁾. Следовательно, если положить $\alpha_{n-1} = x$, имеем $\alpha_n' = Y_{n,1}(x)$, $\alpha_n'' = Y_{n,2}(x)$. Найдем вид этих функций. Согласно результатам ⁽¹⁾, различаются следующие случаи:

$$\delta(\alpha_0, Y_{n,1}) = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \dots & \alpha_{n/2} \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_{n/2+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n/2-1} & \dots & x \\ \alpha_{n/2+1} & \dots & x \end{vmatrix} Y_{n,1} \quad \delta(\alpha_1, Y_{n,1}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_{(n+1)/2} \\ \alpha_2 & \dots & \alpha_{(n+3)/2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{(n-1)/2} & \dots & x \\ \alpha_{(n+1)/2} & \dots & x \end{vmatrix} Y_{n,1}$$

1) n четное; $Y_{n,1}(x)$ определяется из условия $\delta(\alpha_0, Y_{n,1}) = 0$, что дает параболу второго порядка $Y_{n,1}(x) = A_{n,1}x^2 + \dots$, где $A_{n,1} = \delta(\alpha_0, \alpha_{n-1}) / \delta(\alpha_0, \alpha_{n-2})$; оба эти определителя положительны (критерий аморфности).

2) n нечетное; $Y_{n,1}(x)$ находится из условия $\delta(\alpha_1, Y_{n,1}) = 0$, что дает $Y_{n,1}(x) = B_{n,1}x^2 + \dots$, где $B_{n,1} = \delta(\alpha_1, \alpha_{n-1}) / \delta(\alpha_1, \alpha_{n-2})$; все $\delta > 0$.

Для определения $Y_{n,2}(x)$ надо составить разности $\beta_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, где $\beta_{n-2} = \alpha_{n-2} - x$; $\beta_{n-1} = x - Y_{n,2}(x) = \beta'_{n-1}(x)$.

3) n нечетное; имеем $\delta(\beta_0, \beta'_{n-1}) = 0$, что дает $x - Y_{n,1}(x) = \frac{\delta(\beta_0, \beta_{n-5})}{\delta(\beta_0, \beta_{n-3})}x^2 + \dots$ или $Y_{n,2}(x) = -B_{n,2}x^2 + \dots$; все $\delta > 0$.

4) n четное. Имеем $\delta(\beta_1, \beta_{n-1}) = 0$, и это дает $Y_{n,2}(x) = -A_{n,2}x^2 + \dots$, где $A_{n,2} = \delta(\beta_1, \beta_{n-5}) / \delta(\beta_1, \beta_{n-3})$, $\delta > 0$.

Теперь составим $\alpha_n''(x) - \alpha_n'(x) = Y_{n,2}(x) - Y_{n,1}(x) = A_n(x)$. Имеем во всех случаях

$$A_n(x) = -C_n x^2 + \dots, \quad (4)$$

при n четном $C_n = A_{n,1} + A_{n,2}$, при n нечетном $C_n = B_{n,1} + B_{n,2}$. Корни параболы (4) суть $x_1 = \alpha_{n-1}$, $x_2 = \alpha_{n-1}'$, так как при этих значениях x интервал наилучшего продолжения A_n равен нулю. Согласно условию теоремы, $A_n(x) = -C_n(x - \alpha_{n-1})(x - \alpha_{n-1}')$ должен быть максимален; следовательно, $\alpha_{n-1} = \frac{1}{2}(\alpha_{n-1}' + \alpha_{n-1}'')$ и $A_n = C_n \cdot \frac{1}{4}A_{n-1}^2$.

Следствие 1. Если $(\alpha_i)_0^{n-1}$ имеет место $A_n = L_n$, то для продолжения свойства $A_{n+1} = L_{n+1}$ необходимо положить $\alpha_n = \frac{1}{2}(\alpha_n' + \alpha_n'')$.

Следствие 2. Чтобы имело место $A_k = L_k$ при всех $1 \leq k \leq n$, необходимо, чтобы $\alpha_k = \frac{1}{2}(\alpha_k' + \alpha_k'')$ при $k = 1, 2, \dots, n-1$. Следовательно, если таковой отрезок существует, то он единственный с точностью до множителя α_0 .

Положив $\alpha_0 = 1$, докажем его существование конструктивным образом.

Теорема 3. Последовательность, построенная следующим образом: $\alpha_0 = 1$; $\alpha_1 = \frac{1}{2}(\alpha_1' + \alpha_1'')$, ..., $\alpha_n = \frac{1}{2}(\alpha_n' + \alpha_n'')$, ..., такова, что при каждом $n \geq 1$, $A_n = 1/2^{2n-2}$.

Эта последовательность, очевидно, аморфна. Для начальных n имеем: $n = 1$: $\alpha_1' = 0$, $\alpha_1'' = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $A_1 = 1$; $n = 2$: $\alpha_2' = \frac{1}{4}$; $\alpha_2'' = \frac{1}{2}$; $\alpha_2 = \frac{3}{8}$; $A_2 = \frac{1}{4}$.

Переходим к индукции. Пусть для $(\alpha_i)_0^n$ имеет место $A_k = 1/2^{2k-2}$ при всех $k = 1, 2, \dots, n$; докажем, что, взяв $\alpha_{n+1} = \frac{1}{2}(\alpha_{n+1}' + \alpha_{n+1}'')$, получим $A_{n+1} = 1/2^{2n}$. Согласно условию, имеем $\alpha_k = \alpha_k' + 1/2^{2k-1} = \alpha_k'' - \lambda/2^{2k-1}$. Для A_{n+1} при $\alpha_n = \frac{1}{2}(\alpha_n' + \alpha_n'')$ имеем формулу (4), где n надо заменить на $n+1$. Рекуррентные формулы для определителей таковы:

1) n четное; $\delta(\alpha_0, \alpha_n) = \delta(\alpha_0, \alpha_{n-2}) / 2^{2n-1}$. Для определителей на разностях (β_i) имеем $\beta_{k-1} = \beta'_{k-1} + 1/2^{2k-1}$ при $k \leq n$; тогда $\delta(\beta_1, \beta_{n-1}) = \delta(\beta_1, \beta_{n-3}) / 2^{2n-1}$.

2) n нечетное; $\delta(\alpha_1, \alpha_n) = \delta(\alpha_1, \alpha_{n-2}) / 2^{2n-1}$; $\delta(\beta_0, \beta_{n-1}) = \delta(\beta_0, \beta_{n-3}) / 2^{2n-1}$.

Имеем формулы $C_{n+1} = A_{n+1,1} + A_{n+1,2}$ при $n+1$ четном, и $C_{n+1} = B_{n+1} + B_{n+1,2}$ при $n+1$ нечетном. Отсюда $A_{n+1,1} = A_{n+1,2} = B_{n+1,1} = B_{n+1,2} = 2^{2n-3}$. Итак, при любом n , $C_{n+1} = 2^{2n-3}$ и $A_{n+1} = 2^{2n-2} \cdot \frac{1}{4}(\alpha_n'' - \alpha_n')^2 = 1/2^{2n}$. Индукция завершена.

Следствие 1. В построенной последовательности $(\alpha_i)_0^\infty$ при каждом $n \geq 1$ для двух отрезков-функционалов

$$1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n', \quad (5)$$

$$1, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n'' \quad (6)$$

имеет место $T_n(\bar{6}) = 1$; $-T_n(\bar{3}) = 1$; отсюда $T_n(\bar{a}) = \frac{1}{2}T_n(\bar{5}) + \frac{1}{2}T_n(\bar{6}) = 0$. Следовательно, можно строить эту единственную последовательность так: $\alpha_0 = 1$ и при $n \geq 1$, (α_n) определяются из условия $T_n(\bar{a}) = 0$; таким образом, сначала определяется α_n , а затем $\alpha_n' = \alpha_n - 1/2^{2n-1}$ и $\alpha_n'' = \alpha_n + 1/2^{2n-1}$.

Следствие 2. На тождестве $T_{n+1}(x) = 4xT_n(x) - 2T_n(x) - T_{n-1}(x)$ функционал $1, \alpha, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ дает $(xT_n)_{\bar{a}} = 0$, так как $T_k(\bar{a}) = 0$ при $k \geq 1$. Умножая тождество последовательно на $x, x^2, \dots, x^{n-1}$ и переходя к функционалам, получим $(x^k \cdot T_n)_{\bar{a}} = 0$ при любом $k < n$; а при $k = n$ имеет место $(x^n \cdot T_n)_{\bar{a}} = 1/2^{2n}$.

Теорема 4. Не существует никакого другого аморфного отрезка $(\alpha_i)_0^{n-1}$ при $\alpha_0 = 1$, у которого интервал наилучшего продолжения A_n совпадает с критическим интервалом L_n .

Для доказательства нужны формулы, полученные в статье (3). Приведем их. Рассмотрим общий случай двух отрезков.

$$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n'' \quad (7)$$

$$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}, \mu_n'' \quad (8)$$

где μ_n' и μ_n'' — границы критического интервала отрезка $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{n-1}$. Пусть разложение по узлам полинома $T_n(x)$, т. е. по $(\tau_{i,n})_{i=0}^n$, для (7)

есть $\mu_k = \sum_0^n \Delta_i' \tau_{i,n}^k$, а для (8) $\mu_k = \sum_0^n \Delta_i'' \tau_{i,n}^k$, где нагрузки

(Δ_i') и (Δ_i'') различных знаков.

Если среди чисел $2|\Delta_0'|, |\Delta_1'|, \dots, |\Delta_{n-1}'|, 2|\Delta_n'|$ максимальное равно $\Delta^{(n)}$, то оно же остается таковым среди чисел $2|\Delta_0''|, |\Delta_1''|, \dots, |\Delta_{n-1}''|, 2|\Delta_n''|$. Если N_n' и N_n'' — соответственные нормы для отрезков (7) и (8), а $L_n = \mu_n'' - \mu_n'$, то справедливы формулы

$$N_n' + N_n'' = \Delta^{(n)} n; \quad L_n = \frac{1}{2^{2n-1}} \Delta^{(n)} n; \quad \Delta_i' = \Delta_i' + (-1)^{n-i} \frac{\Delta^{(n)}}{1/2}.$$

В частном случае для отрезков (1) и (2) при $\mu_n'' = \alpha_n''$; $\mu_n' = \alpha_n'$ и $\alpha_0 = 1$

$$N_n' + N_n'' = 2; \quad \Delta^{(n)} = 2/n; \quad L_n = 1/2^{2n-2} = A_n.$$

Ввиду абсолютной монотонности (1) и (2), здесь имеет место: если $\Delta_i'' > 0$, то $\Delta_i' = 0$, и наоборот (отрицательных нагрузок нет). Тогда при $i \neq 0$ или n все $\Delta_i' = 2/n$, $\Delta_k'' = 2/n$, а при $i = 0$ или n нагрузки суть $1/n$.

Итак, (1) и (2) имеют вполне определенную структуру, и если такой отрезок существует, то, с точностью до множителя α_0 , он единственный; его существование доказано теоремой 3. В дальнейшем эту уникальную последовательность с начальным членом 1 обозначим $(U_k)_0^\infty$.

Следствие. Все доказанное приводит к новым свойствам полиномов Чебышева $\{T_n(x)\}$. Действительно, числа $(U_k)_0^n$ имеют двойную узловую структуру, а именно, положив $T_n(\tau_{i,n}^+) = +1$; $T_n(\tau_{i,n}^-) = -1$:

$$(U_k) = \frac{2}{n} \sum_{(i)}^+ \tau_{i,n}^k = \frac{2}{n} \sum_{(i)}^- \tau_{i,n}^k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (9)$$

(Знак $\sim$ служит напомним, что перед узлом $\tau_{n,n}^+$ стоит множитель $1/2$).

Отсюда, при любых n и $k < n$ справедливо

$$\widetilde{\sum} \tau_{i,n}^{+k} = \sum \bar{\tau}_{i,n}^k = \frac{n}{2} U_k; \quad (10)$$

при $k = n$, очевидно,

$$\widetilde{\sum} \tau_{i,n}^{+n} = \frac{n}{2} U_n'', \quad \sum \bar{\tau}_{i,n}^n = \frac{n}{2} U_n'. \quad (11)$$

Ленинградский электротехнический институт связи
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило
23 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. В. Вороновская, Метод функционалов и его приложения, Л., 1963.
² Е. В. Вороновская, ДАН, 166, № 6 (1966). ³ Е. В. Вороновская, Э. А. Яров, ДАН, 197, № 1 (1971).