В. С. КОЗЯКИН, М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, А. В. ПОКРОВСКИЙ

ВИБРОУСТОЙЧИВЫЕ ГИСТЕРОНЫ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 13 III 1972)

1. Рассмотрим нелинейный преобразователь W , состояние которого в каждый момент времени t определяется парой чисел $\{u, x\}$. Будем считать, что W преобразует каждую кусочно монотонную и непрерывную функцию $u(t)$, заданную на некотором промежутке $[t_0, t_1]$, в непрерывную функцию $x(t)$, которая зависит также от состояния $\{u_0, x_0\}$ преобразователя W в момент $t = t_0$ (функция $u(t)$ должна при этом удовлетворять условию $u(t_0) = u_0$). Соответствие между $u(t)$ и $x(t)$ будем описывать равенством

$$x(t) = W[t_0, x_0]u(t). \quad (1)$$

Функцию $u(t)$ будем называть управлением, а функцию $x(t)$ — выходным сигналом. Физическая природа преобразователя W для нас не важна; если W — одномерный пластический элемент, то роль управления может играть переменная деформация, а выходного сигнала — внутреннее напряжение; если W — намагничиваемый элемент, то роль управления может играть переменная напряженность внешнего магнитного поля, а выходного сигнала — магнитная индукция. Для нас преобразователь — черный ящик.

Преобразователь W назовем гистероном, если он обладает групповым свойством: при любых $t_0 \leq t_1 \leq t_2$

$$W[t_1, W[t_0, x_0]u(t_1)]u(t_2) = W[t_0, x_0]u(t_2). \quad (2)$$

Гистерон W будем называть статическим, если при каждом монотонном управлении $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, приращение выходного сигнала $x(t)$ определяется лишь разностью $u(t_0) - u(t_1)$ и начальным состоянием гистерона:

$$W[t_0, x_0]u(t_1) - x_0 = f[u(t_0), u(t_1), x_0]. \quad (3)$$

Допустим, что для любых двух возможных состояний $\{u_0, x_0\}$ и $\{u_1, x_1\}$ преобразователя W можно указать такое управление $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, удовлетворяющее условиям $u(t_0) = u_0$ и $u(t_1) = u_1$, что $W[t_0, x_0]u(t_1) = x_1$. Тогда преобразователь W назовем управляемым.

Для исследования преобразователя W естественно провести анализ выходных сигналов при некоторых тестовых управлениях. В качестве набора тестовых управлений рассмотрим функции $u(t) = a + b \sin(t - \delta)$, $0 \leq t < \infty$. Выходной сигнал $x(t; a, b, \delta, x_0)$ будет определенной на $[0, \infty)$ непрерывной функцией, которая зависит от параметров a, b, δ, x_0 . Если $x(t; a, b, \delta, x_0)$ непрерывна при каждом δ по переменным a, b и x_0 равномерно относительно t , то назовем преобразователь W корректным. В этом определении нужно, конечно, рассматривать лишь такие x_0 , что точка $\{a - b \sin \delta, x_0\}$ является одним из возможных состояний преобразователя.

2. Пусть $C[t_0, t_1]$ — пространство непрерывных на промежутке $[t_0, t_1]$ функций $u(t)$. Равенство (1) позволяет рассматривать $W[t_0, x_0]$ как нелинейный оператор со значениями в $C[t_0, t_1]$, определенный на некотором множестве $\mathfrak{M} \subset C[t_0, t_1]$ кусочно монотонных функций. Допустим, что

оператор $W[t_0, x_0]$ может быть продолжен по непрерывности на все функции из замыкания $\overline{\mathfrak{M}}$ множества $\mathfrak{M}$ в пространстве $C[t_0, t_1]$. Сохраним за продолженным оператором обозначение $W[t_0, x_0]$ и назовем его гистералом, порожденным преобразователем W в пространстве $C[t_0, t_1]$.

Гистерон W назовем виброустойчивым, если он порождает гистерал в каждом пространстве $C[t_0, t_1]$. Если гистерон W статический, то для его виброустойчивости достаточно, чтобы он порождал гистерал в каком-либо одном пространстве $C[t_0, t_1]$.

Понятие виброустойчивости отражает важные свойства нелинейного преобразователя. Оно означает, во-первых, что наложение на управление $u(t)$ малого по амплитуде шума вызывает малое изменение выходного сигнала. Во-вторых, если преобразователь устойчив по отношению к малым по амплитуде шумам и если в качестве управлений могут рассматриваться произвольные непрерывные функции $u(t)$, то выходной сигнал всегда совпадает со значением гистерала на соответствующем непрерывном управлении.

Теорема 1. Пусть гистерон W статический, управляемый и корректный.

Тогда он виброустойчив.

Если гистерон W виброустойчив, то гистерал $W[t_0, x_0]$ определен на каждом непрерывном управлении, заданном на некотором полубесконечном промежутке $t_0 \leq t < \infty$.

Теорема 2. Пусть гистерон W статический, управляемый и корректный.

Тогда гистерал $W[t_0, x_0]$ равномерно непрерывен по метрике пространства $C[0, \infty)$ на каждой ограниченной части своей области определения.

Гистерал $W[t_0, x_0]$ непрерывно зависит от x_0 ; на полной формулировке соответствующей теоремы мы не останавливаемся.

Теорема 3. Пусть гистерон $W[t_0, x_0]$ порожден статическим, управляемым и корректным гистероном. Пусть $u(t)$ — непрерывное ω -периодическое ($u(t + \omega) \equiv u(t), t \geq 0$) управление.

Тогда выходной сигнал $x(t)$ будет ω -периодичен при $t \geq \omega$: $x(t + \omega) \equiv x(t), t \geq \omega$.

Кривая $u = u(t), x = x(t), t \geq \omega$, в плоскости $\{u, x\}$ — это обычная гистерезисная петля преобразователя W при заданном ω -периодическом управлении $u(t)$. Именно в связи с возникновением гистерезисной петли мы ввели термины гистерон и гистерал.

4. Рассмотрим в плоскости $\{u, x\}$ множество Ω , которое является объединением вертикальных промежутков $\omega(u), -\infty < u < \infty$; каждый промежуток $\omega(u)$ предполагается непустым и состоящим из точек с абсциссой u . Будем считать, что принадлежащие Ω концы промежутков $\omega(u)$ образуют графики Γ_l и Γ_r двух непрерывных функций $x = \chi_l(u), -\infty < u < u_l^*$, и $x = \chi_r(u), u_r^* < u < \infty$. Число u_l^* либо конечно, либо равно ∞ ; аналогично, u_r^* либо конечно, либо равно $-\infty$. Пересечение Γ_0 графиков Γ_l и Γ_r не обязательно пусто.

Пусть задано семейство непрерывных функций $x = \varphi(u; \alpha)$, каждая из которых задана на конечном промежутке $[u_l(\alpha), u_r(\alpha)]$, причем

$$\{u_l(\alpha), \varphi[u_l(\alpha); \alpha]\} \in \Gamma_l, \quad \{u_r(\alpha), \varphi[u_r(\alpha); \alpha]\} \in \Gamma_r,$$

а при $u_l(\alpha) < u < u_r(\alpha)$ точка $\{u, \varphi(u; \alpha)\}$ является внутренней точкой промежутка $\omega(u)$. Через Π_l (Π_r) обозначим объединение множества Γ_0 с множеством точек $\{u_l(\alpha), \chi_l[u_l(\alpha)]\}$ (с множеством точек $\{u_r(\alpha), \chi_r[u_r(\alpha)]\}$). Через $\Pi_l(u_0)$ ($\Pi_r(u_0)$) обозначим часть множества Π_l (Π_r), состоящую из точек с абсциссами $u \geq u_0$ (с абсциссами $u \leq u_0$).

Ниже будут рассматриваться семейства функций $\varphi(u; \alpha)$, которые обладают следующими свойствами.

1°. Если $\{u_0, x_0\}$ — внутренняя точка промежутка $\omega(u_0)$, то через нее проходит график одной и только одной функции $\varphi(u; \alpha)$.

2°. Если функции $\varphi(u; \alpha)$ и $\varphi(u; \beta)$ различны, то произведение $[u_l(\alpha) - u_l(\beta)] \times [u_r(\alpha) - u_r(\beta)]$ положительно.

3°. В каждом множестве $\Pi_l(u_0)$, $u_0 < u_l^*$, есть самая левая точка (ее абсциссу обозначим через $v_l(u_0)$). В каждом множестве $\Pi_r(u_0)$, $u_0 > u_r^*$, есть самая правая точка (ее абсциссу обозначим через $v_r(u_0)$).

Сопоставим теперь каждой точке $\{u_0, x_0\} \in \Omega$ непрерывную функцию $\psi(u; u_0, x_0)$, $-\infty < u < \infty$, по следующему правилу. Если $\{u_0, x_0\} \in \Gamma_l$, то $\psi(u; u_0, x_0)$ совпадает с $\chi_l(u)$ при $u \leq v_l(u_0)$; затем возможны два случая: если $\{v_l(u_0), \chi_l[v_l(u_0)]\} \in \Gamma_0$, то $\psi(u; u_0, x_0)$ совпадает с $\chi_r(u)$ при $u \geq v_l(u_0)$, если же $v_l(u_0) = u_l(\alpha)$ при некотором α , то $\psi(u; u_0, x_0) = \varphi(u; \alpha)$ при $u_l(\alpha) \leq u \leq u_r(\alpha)$ и $\psi(u; u_0, x_0) = \chi_r(u)$ при $u_r(\alpha) \leq u < \infty$. Если $\{u_0, x_0\} \in \Gamma_r$, то $\psi(u; u_0, x_0)$ совпадает с $\chi_r(u)$ при $u \geq v_r(u_0)$; затем снова возможны два случая: если $\{v_r(u_0), \chi_r[v_r(u_0)]\} \in \Gamma_0$, то $\psi(u; u_0, x_0) = \chi_l(u)$ при $u \leq v_r(u_0)$, а если $v_r(u_0) = u_r(\alpha)$ при некотором α , то $\psi(u; u_0, x_0) = \varphi(u; \alpha)$ при $u_l(\alpha) \leq u \leq u_r(\alpha)$ и $\psi(u; u_0, x_0) = \chi_l(u)$ при $-\infty < u \leq u_l(\alpha)$. Наконец, если $\{u_0, x_0\}$ является внутренней точкой промежутка $\omega(u_0)$, через которую проходит график функции $\varphi(u; \alpha)$, то $\psi(u; u_0, x_0) = \chi_l(u)$ при $-\infty < u \leq u_l(\alpha)$, $\psi(u; u_0, x_0) = \varphi(u; \alpha)$ при $u_l(\alpha) \leq u \leq u_r(\alpha)$ и $\psi(u; u_0, x_0) = \chi_r(u)$ при $u_r(\alpha) \leq u < \infty$.

Определим теперь по каждому монотонному непрерывному управлению $u(t)$ непрерывную функцию $x(t)$ равенством

$$x(t) \equiv W[t_0, x_0; \psi]u(t) = \psi[u(t); u(t_0), x_0], \quad t \geq t_0$$

(при этом, конечно, предполагается, что $\{u(t_0), x_0\} \in \Omega$). После того, как оператор $W[t_0, x_0; \psi]$ определен на монотонных управлениях, распространим его на кусочно монотонные управления при помощи формулы (2). Корректность описанной схемы определения оператора $W[t_0, x_0; \psi]$ в нашем случае очевидна.

Описанная схема соответствует обычной в физике и механике конструкции элементарных гистерезисных нелинейностей. Возникающий в описанной схеме нелинейный преобразователь обозначим через $W\{\psi\}$ и будем говорить о нем, что он порожден семейством функций $\psi(u; u_0, x_0)$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1° — 3°.

Тогда порожденный семейством функций $\psi(u; u_0, x_0)$ преобразователь $W\{\psi\}$ будет статическим, управляемым и корректным (а значит, и виброустойчивым) гистероном.

Соответствующий гистерону $W\{\psi\}$ гистерал $W[t_0, x_0; \psi]u(t)$ достаточно «хорошо» зависит от чисел t_0, x_0 , управления $u(t)$ и семейства функций $\psi(u; u_0, x_0)$. Мы не имеем возможности привести здесь соответствующие оценки.

5. При доказательстве теоремы 4 и при исследовании гистеронов $W\{\psi\}$ удобно применять различные «квазиметрики», заданные на множестве Ω .

Назовем дистанцией неотрицательную функцию $d(M_1, M_2)$, где $M_1 = \{u_1, x_1\} \in \Omega$ и $M_2 = \{u_2, x_2\} \in \Omega$, если из того факта, что точки N_1 и N_2 лежат между графиками функций $\psi(u; u_1, x_1)$ и $\psi(u; u_2, x_2)$, вытекает неравенство $d(N_1, N_2) \leq d(M_1, M_2)$. Сформулируем в качестве отдельной теоремы одно из основных свойств всех дистанций (это свойство играет наиболее существенную роль в наших построениях).

Пусть заданы две точки $M_1 = \{u_1, x_1\}$, $M_2 = \{u_2, x_2\}$ из Ω и два таких кусочно монотонных управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, что $u_1(t_0) = u_1$ и $u_2(t_0) = u_2$. Положим

$$d(t) = d[M_1(t), M_2(t)], \quad (4)$$

где $M_1(t) = \{u_1(t), x_1(t)\}$ и $M_2(t) = \{u_2(t), x_2(t)\}$, а

$$x_1(t) = W[t_0, x_1; \psi]u_1(t), \quad x_2(t) = W[t_0, x_2; \psi]u_2(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Далее, рассмотрим определенные при $-\infty < u < \infty$ функции

$$\psi[u; u_i(t), x_i(t)], \quad t_0 \leq t \leq t_1; \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

Через a_i обозначим супремум чисел $\bar{u}$, удовлетворяющих неравенствам $\bar{u} < \min u_1(t), \bar{u} < \min u_2(t)$ и таких, что при $u < \bar{u}$ все функции (5) совпадают с $\chi_l(u)$. Через b_l обозначим супремум чисел $\bar{u}$, удовлетворяющих неравенству $\bar{u} < \max \{\max u_1(t), \max u_2(t)\}$ и таких, что при $u < \bar{u}$ хотя бы одна из функций (5) совпадает с $\chi_l(u)$. Аналогично, через a_r обозначим инфимум чисел $\bar{u}$, удовлетворяющих неравенству $\bar{u} > \max \{\min u_1(t), \min u_2(t)\}$ и таких, что при $u > \bar{u}$ хотя бы одна из функций (5) совпадает с $\chi_r(u)$; через b_r обозначим инфимум чисел $\bar{u}$, удовлетворяющих неравенствам $\bar{u} > \max u_1(t), \bar{u} > \max u_2(t)$ и таких, что при $u > \bar{u}$ все функции (5) совпадают с $\chi_r(u)$. Положим, наконец,

$$\gamma_l(\delta) = \sup_{a_l \leq u_1 \leq u_2 \leq b_l; |u_1 - u_2| \leq \delta} d[\{u_1, \chi_l(u_1)\}, \{u_2, \chi_l(u_2)\}],$$

$$\gamma_r(\delta) = \sup_{a_r \leq u_1 \leq u_2 \leq b_r; |u_1 - u_2| \leq \delta} d[\{u_1, \chi_r(u_1)\}, \{u_2, \chi_r(u_2)\}].$$

Теорема 5. Пусть $|u_1(t) - u_2(t)| \leq \delta$ при $t_0 \leq t \leq t_1$. Тогда функция (4) удовлетворяет неравенству

$$d(t) \leq \max \{d(t_0), \gamma_l(\delta), \gamma_r(\delta)\}.$$

6. Перейдем к формулировке основной в настоящей статье теоремы идентификации.

Теорема 6. Пусть преобразователь W является статическим, управляемым и корректным гистероном.

Тогда этот гистерон совпадает с преобразователем $W\{\psi\}$, порожденным некоторым семейством функций $\psi\{u; u_0, x_0\}$.

7. Точка зрения, согласно которой изучение нелинейных преобразователей гистерезисного типа требует анализа функциональных свойств операторов типа гистерала, обсуждалась в (1, 2) для некоторых частных случаев.

Отметим, что начальным импульсом для анализа частных типов гистеронов для авторов были работы (см., например, (4-7)) по различным феноменологическим моделям упруго-пластических тел.

Теорема 4 настоящей работы является, с одной стороны, усилением основного результата работы (1); с другой стороны, она тесно связана с полученными в (2) признаками виброустойчивости дифференциальных уравнений.

Авторы выражают благодарность Е. С. Пятницкому и М. А. Розенблату за полезное обсуждение ряда вопросов, связанных с темой статьи.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
11 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. А. Красносельский, Б. М. Даринский и др., ДАН, 190, № 1, 29 (1970). ² М. А. Красносельский, А. В. Покровский, ДАН, 195, № 3 (1970).
³ У. Портер, Современные основания общей теории систем, «Наука», 1971.
⁴ А. Ю. Ишлинский, Укр. матем. журн., 6, № 3, 314 (1954). ⁵ W. Prager, J. Appl. Mech., 23, 493 (1956). ⁶ I. F. Besseling, J. Appl. Mech., 25, 529 (1958). ⁷ А. Ю. Ишлинский, Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 583 (1944).