Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 6

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

В. И. МАЛЫХИН

О СЧЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, НЕ ИМЕЮЩИХ БИКОМПАКТИФИКАЦИЙ СЧЕТНОЙ ТЕСНОТЫ

(Представлено академиком П. С. Александровым 2 III 1972)

I. Данная работа посвящена некоторым вопросам, связанным с таким кардинальным инвариантом, как теснота. Это понятие принадлежит А. В. Архангельскому и определяется так: $t(X) = \min\{\mathfrak{m}$: если $x \in [A]$, то существует $B \subset A$, $|B| \leqslant \mathfrak{m}_0$ и $x \in [B]\}$.

В связи с этим понятием некоторое время стоял вопрос: существуют ли такие два пространства X_i, $i = 1, 2$, что $t(X_i) \leqslant \aleph_0$, но $t(X_1 \times X_2) > \aleph_0$. Автором было доказано [7], что если одно из этих пространств есть подпространство бикомпакта счетной тесноты, то его произведение на любое пространство счетной тесноты будет иметь счетную тесноту. Затем А. В. Архангельский показал, что в общем случае ответ на сформулированный выше вопрос отрицателен. Им же было найдено два критерия сохранения счетной тесноты при умножении данного пространства на произвольное пространство со счетной теснотой [2]. Один из них формулируется так: К: $t(X \times Y) \leqslant \aleph_0$ для всякого Y такого, что $t(Y) \leqslant \aleph_0$, если и *только если существует бикомпактное расширение* bX *со следующим свойством* а). Пусть $\tilde{X} = \cup\{[A]_{bX}\colon A \subset X, |A| \leqslant \aleph_0\}$.

а) Если $x \in X$ и $x \in [M]_{bX}$, где $M \subset \tilde{X}$, то существует $M' \subset M$, $|M'| \leqslant \aleph_0$ и $x \in [M']_{bX}$.

В [2] показано, что если а) выполняется (не выполняется) в каком-то бикомпактном расширении, то а) выполняется (не выполняется) в любом другом. Там же показано, что для бисеквенциальных (определение пространств см. ниже) пространств К выполняется. Ниже, приняв континуум-гипотезу [СН], мы доказываем, что К может не выполняться даже для счетных сильно Фреше-пространств (теорема 4).

Определение. 1) X есть *пространство Фреше — Урысона*, если из того, что $x \in [M]$ следует, что в M существует сходящаяся к x последовательность.

2) X *бисеквенциально* [3], если из того, что $x \in [\xi] = \cap\{[A]_X\colon A \in \xi\}$, где ξ — некоторый фильтр, следует существование фильтра η, синхронного с ξ (т. е. $A \cap B \neq \Lambda$ для всяких $A \in \eta$ и $B \in \xi$), имеющего счетную базу и сходящегося к точке x.

3) X *сильно Фреше*, если 2) выполняется хотя бы для ξ, имеющих счетную базу.

II. Счетное пространство с одной неизолированной точкой будет обозначаться через $N \cup \{F\}$. Здесь $\{F\}$ и есть неизолированная точка, а ее фильтр окрестностей, суженный на N, есть F.

Через βX обозначается чех-стоуновская бикомпактификация (пространство ультрафильтров) дискретного пространства X. Мы полагаем $X^* = \beta X \setminus X$ и $A^* = [A]_{\beta X} \setminus X$. Каждому фильтру F на множестве X ставим в соответствие множество $F' = \cap\{[A]_{\beta X}\colon A \in F\}$. Очевидно, F — свободный фильтр в том и только в том случае, если $F' \subset X^*$. В дальнейшем F отождествляется с F' и, если не оговорено противное, имеются в виду свободные фильтры.

Напомним некоторые сведения о βN, где $|N| = \aleph_0$.

A) Множество G открыто-замкнуто в N^* в том и только в том случае, если существует $A \subset N$, для которого $G = A^*$ ([4]).

B) Если G_n открыты для всякого $n < \omega_0$ в N^* и $\cap \{G_n: n < \omega_0\} \neq \Lambda$, то $\mathrm{Int}_{N^*}(\cap \{G_n: n < \omega_0\}) \neq \Lambda$ ([4]).

C) Точка $y \in N^*$ называется p-точкой, если из того, что $y \in \cap \{G_n^*: : n < \omega_0\}$ следует, что $y \in \mathrm{Int}_{N^*}(\cap \{G_n^*: n < \omega_0\})$. Существование таких точек доказано в некоторых моделях, например, в предположении [CH] ([4]).

D) N^* есть F-пространство ([6]). Нам достаточно слабое D_1. Если $A = \cup \{G_n^*: n < \omega_0\}$ и $B = \cup \{K_n^*: n < \omega_0\}$ и $A \cap B = \Lambda$, то существует $R^* \supset A$ и $R^* \cap B = \Lambda$.

III. В этой части будут даны примеры пространств вида $N \cup \{F\}$, не имеющих счетно-компактных регулярных расширений счетной тесноты (предложение 3) и бикомпактных расширений счетной тесноты (теорема 4).

Положим $T_{\aleph_0} = \cap \{G_n^*: n < \omega_0\}$. Будем предполагать, что $G_n^* \supset G_{n+1}^*$ для всех $n < \omega_0$. В силу B) $\mathrm{Int}_{N^*} T_{\aleph_0} = \Lambda$, если все $G_n^* = \Lambda$.

Предложение 1. *Если Δ — семейство открыто-замкнутых множеств, лежащих в $\mathrm{Int}_{N^*} T_{\aleph_0}$, и $|\Delta| \leqslant \aleph_0$, то существует $D^* \subset \mathrm{Int}_{N^*} T_{\aleph_0}$ такое, что $D^* \supset \cup \{G^*; G^* \in \Delta\}$.*

Следствие 1. *Пусть $y \in N^*$. Тогда существует семейство $\Delta = \{G^*\}$ такое, что для всякого $\Delta' \subset \Delta$ и $|\Delta'| \leqslant \aleph_0$ $y \notin [\cup \Delta']_{\beta N}$, хотя $y \in [\cup \Delta]_{\beta N}$.*

Следствие 2. *Пусть $F \subset N^*$ и существует $T_{\aleph_0}$ такое, что $F \cap T_{\aleph_0} \neq \Lambda$, но $F \cap \mathrm{Int}_{N^*}, T_{\aleph_0} = \Lambda$.*

Тогда существует семейство $\Delta = \{G^*\}$ такое, что $F \cap [\cup \Delta]_{\beta N} \neq \Lambda$, но если $|\Delta'| \leqslant \aleph_0$ и $\Delta' \subset \Delta$, то $F \cap [\cup \Delta']_{\beta N} = \Lambda$.

Действительно, годится $\Delta = \{G^*: G^* \subset \mathrm{Int}_{N^*} T_{\aleph_0}\}$.

Определение. Замкнутое множество $F \subset N^*$ называется счетно-достижимым, если из $A \subset N^*$ и $[A] \cap F \neq \Lambda$ следует, что существует $B \subset \Lambda$, для которого $|B| \leqslant \aleph_0$ и $[B] \cap F \neq \Lambda$.

Следующее предложение позволяет получать примеры замкнутых в N^* множеств с определенными свойствами.

Предложение 2. *Пусть $\Delta = \{G^*\}$ и все G^* из Δ не пересекаются, а F — счетно-достижимое множество.*

Тогда $\Phi = F \setminus \bigcup \Delta'$ будет счетно-достижимым для всякой подсистемы Δ' из Δ.

Следствие 3. *Существует счетно-достижимое множество $F \subset N^*$ такое, что $\mathrm{Int}_{N^*} F = \Lambda$.*

IV. А. В. Архангельским был поставлен вопрос: можно ли вложить пространство $N \cup \{y\}$, где $y \in N^*$, в бикомпакт счетной тесноты? Справедливо

Предложение 3. *Пусть для замкнутого множества $F \subset N^*$ существует семейство $\Delta = \{G^*\}$ такое, что $F \cap [\cup \Delta]_{\beta N} \neq \Lambda$, но если $\Delta' \subset \Delta$ и $|\Delta'| \leqslant \aleph_0$, то $F \cap [\cup \Delta']_{\beta N} = \Lambda$.*

Тогда, если X счетно-компактно и регулярно, а $N \cup \{F\}$ плотно в X, то точка $\{F\}$ не является счетно-достижимым множеством в X.

Следствие 4. *Если $y \in N^*$, то при $F = \{y\}$ справедливы заключения предложения 3.*

Множеством типа $T^{\aleph_0}$ мы будем называть замыкание объединения счетной системы открыто-замкнутых множеств, среди которых бесконечно много различных. Положим также $A_{\aleph_1} = \cap \{G_\alpha^*: \alpha < \omega_1\}$, где $G_\alpha^* \supset G_\beta^*$ при $\alpha < \beta$ и все G_α^* различны.

Следствие 5. *Пусть $F = A_{\aleph_1}$ (или F типа $T^{\aleph}$), а X хаусдорфово и есть расширение $N \cup \{F\}$. Если $B \subset X \setminus (N \cup \{F\})$ и $|B| \leqslant \aleph_0$, то $\{F\} \notin [B]_X$. Если же X регулярен, то $[F]$ — p-точка в $X \setminus N$.*

Следствие 5 позволяет получать примеры счетных пространств, наиболее «плохо» устроенных в смысле возможности вложения их в расширения счетной тесноты.

Позднее будет показано, что пространство $N \cup \{T^{\aleph_0}\}$ есть пространство Фреше — Урысона.

Предложение 4. *Пусть F — не счетно-достижимое множество в N^* и X — бикомпактное расширение пространства $N \cup \{F\}$.*

Тогда точка $\{F\}$ в X не счетно-достижима.

V. До сих пор пространства вида $N \cup \{F\}$ рассматривались только с позиций вложения их в расширения счетной тесноты. Остальная часть работы посвящена построению пространства вида $N \cup \{F\}$ бисеквенциальных, сильно Фреше, Фреше — Урысона.

Теорема 1. 1) *$X = N \cup \{F\}$ является пространством Фреше — Урысона тогда и только тогда, когда $F = [\mathrm{Int}_{N^*} F]_{\beta N}$.*

2) *Пространство $X = N \cup \{F\}$ бисеквенциально, если и только если F есть объединение множеств вида $T_{\aleph_0}$.*

3) *$X = N \cup \{F\}$ есть пространство сильно Фреше, в том и только в том случае, если $F = [\mathrm{Int}_{N^*} F]^{\aleph_0}$. Здесь $[A]^{\aleph_0} = \{x \in N^*$: если $x \in T_{\aleph_0}$, то $A \cap T_{\aleph_0} \neq \Lambda\}$* ([1]).

Схема доказательства. 1) Если $\{b_n: n < \omega_0\}$ — сходящаяся к $\{F\}$ последовательность, то $B^* \subset F$, где $B = \{b_n: n < \omega_0\}$, и обратно. Поэтому, если $B^* \cap F \neq \Lambda$, где $B \subset N$, то чтобы $N \cup \{F\}$ было бы пространством Фреше — Урысона, необходимо и достаточно, чтобы $B^* \cap \mathrm{Int}_{N^*} F \neq \Lambda$ для всякой такой последовательности. 2), 3). Здесь используются определения соответствующих пространств и пункты II A) и II B).

Теорема 2. *Если U открыто в N^* и $[U]_{\aleph_0} = U$ (в частности, если $U = \cup \{G_\alpha^*: \alpha < \omega_1\}$ и $G_{\alpha}^* \supset G_{\beta}^*$ при $\alpha > \beta$), то $N \cup \{F\}$, где $F = [U]$, есть пространство сильно Фреше.*

Доказательство. Как показано в ([1]), в бикомпактах верно равенство (имеющее место для произвольного кардинала $\mathfrak{m}$)

$$[[A]_{\aleph_0}]^{\aleph_0} = [A].$$

Здесь $[A]_{\aleph_0} = \cup\{[B]: B \subset A, |B| \leqslant \aleph_0\}$ ([1]).

Поэтому имеем $F = [U] = [[U]_{\aleph_0}]^{\aleph_0} = [U]^{\aleph_0}$ и ссылка на теорему 1 заканчивает доказательство.

Теорема 3 [CH]. *Существует пространство вида $N \cup \{F\}$ сильно Фреше, но не бисеквенциальное.*

Доказательство. Пусть $(M) = \aleph_1$ и M дискретно, а βM — чехстоуновская бикомпактификация дискретного пространства M. Пусть $M^* = [M]_{\aleph_0} \setminus M$, а $M^{**} = \beta M \setminus (M \cup M^*)$. «Склеим» M^{**} в точку $\{M^{**}\}$. Получим бикомпакт $b_1 M = M^* \cup \{M^{**}\}$. Как замечено в (5), $b_1 M$ гомеоморфно N^*, причем при гомеоморфизме $\{M^{**}\}$ переходит в p-точку (причем для любой p-точки существует соответствующий гомеоморфизм, переводящий точку $\{M^{**}\}$ в нее). Исходя из этого, можно утверждать существование в N^* множества F со следующими свойствами:

1) $|\mathrm{Fr}_{N^*} F| = 1$ и этой граничной точкой является p-точка $\tilde{p}$;

2) $F = (\bigcup \{G_\alpha^*: \alpha < \omega_1\}]_{\beta N}$ и $G_\alpha^* \supset G_\beta^*$ при $\alpha > \beta$.

Следовательно, $N \cup \{F\}$ есть пространство сильно Фреше. Однако оно не может быть бисеквенциально, ибо если $\tilde{p} \in T_{\aleph_0}$, то $\tilde{p} \in \mathrm{Int}_{N^*} T_{\aleph_0}$, но это невозможно, так как $\tilde{p} \in \mathrm{Fr}_{N^*} F$.

Теорема 4 [CH]. *Существует пространство сильно Фреше вида $N \cup \{F\}$, для которого не выполняется* K, *другими словами, для этого пространства существует пространство счетной тесноты, при умножении на которое счетная теснота не сохраняется.*

Доказательство. В силу предложения 4 достаточно показать, что множество F, о котором шла речь в теореме 3, не является счетно-достижимым. Действительно, $[N^* \setminus F] \cap F \neq \Lambda$. Но если $B \subset N^* \setminus F$ и $|B| \leqslant \aleph_0$, то $[B]_{\beta N} \cap F = \Lambda$, ибо иначе было бы $[B]_{\beta N} \cap F \ni \tilde{p}$, что невозможно.

Теорема 5. *Существует бисеквенциальное пространство вида $N \cup \{F\}$ без 1-й аксиомы счетности.*

Для его построения возьмем неметризуемый бикомпакт B с 1-й аксиомой счетности и сепарабельный. Диагональ Δ в B^2, в силу неметризуемости B, не есть множество типа G_δ. Фильтр Φ окрестностей Δ в B^2, суженный на счетное плотное множество $S \subset B^2$, не имеет счетной базы в силу нормальности B^2. Пространство $\{\Phi\} \cup S$, где S взято в дискретной топологии, дает пример бисеквенциального пространства без 1-й аксиомы счетности. Действительно, пусть ξ — ультрафильтр на множестве $\{\Phi\} \cup S$ такой, что $\{\Phi\} \in [\xi]$. Можно сразу же считать, что существует $A \in \xi$ такое, что $\{\Phi\} \notin A$. Пусть $\tilde{\xi}$ — ультрафильтр на B^2, определенный так: $K \in \tilde{\xi} \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (K \cap A) \in \xi$. Оказывается, что $\Delta \cap [\tilde{\xi}] \neq 1$ в силу того, что $\{\Phi\} \in [\xi]$. Итак, существует $x \in \Delta \cap [\tilde{\xi}]$. Пусть η — фильтр окрестностей точки x, суженный на S. Очевидно, η синхронен с ξ и имеет счетную базу и η сходится к $\{\Phi\}$. Теорема доказана.

Теорема 6. *Существует пространство вида* $N \cup \{F\}$, *не являющееся пространством Фреше — Урысона, но для которого выполняется* K.

Пусть F — счетно-достижимое множество в N^* и $\mathrm{Int}_{N^*} F = \Lambda$. Такое существует по следствию 3. Для $N \cup \{F\}$ выполняется K. Действительно, «склеим» F в точку, тем самым получим бикомпакт $b_1 N$, являющийся расширением $N \cup \{F\}$, где выполняется свойство а). В силу теоремы 1 $N \cup \{F\}$ не есть пространство Фреше — Урысона, что завершает доказательство теоремы.

Автор выражает признательность и благодарность проф. А. В. Архангельскому за постоянное внимание к работе и ценные советы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Архангельский, ДАН, **199**, № 6 (1971). [2] А. В. Архангельский, ДАН, **203**, № 5 (1972); **203**, № 6 (1972). [3] E. Michael, Intern. Conf. on General. Topol., 1970. [4] W. Rudin, Duke Math. J., 23, № 3, 409 (1956). [5] И. И. Паровиченко, ДАН, **150**, № 1, 36 (1963). [6] J. Fine, L. Gillman, Bull. Am. Math. Soc., **66**, № 1, 376 (1960). [7] В. И. Малыхин, ДАН, **205**, № 3 (1972).