

О. В. МАНТУРОВ

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЯХ НАД КОМПАКТНЫМИ ГРУППАМИ ЛИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 7 II 1972)

1°. Кольцо $K_c^*(G)$ ⁽¹⁾ для односвязных компактных групп Ли G описано в ⁽²⁾, и результат этой работы таков. Пусть $K_c^0(X)$ — кольцо стабильно эквивалентных виртуальных комплексных векторных расслоений (пучков) над CW -комплексом X . При этом элемент $\xi \in K_c^0(X)$ с точностью до тривиального расслоения определяется гомотопическим классом отображения

$$f_\xi: X \rightarrow BU, \quad (1)$$

где BU — универсальное пространство для унитарной группы.

Пусть $K_c^1(X)$ — абелева группа по сложению стабильно эквивалентных виртуальных нульмерных комплексных векторных расслоений над надстройкой SX пространства X . При этом элемент $\eta \in K_c^1(X)$ определяется гомотопическим классом отображения

$$SX \rightarrow BU,$$

или, что эквивалентно, гомотопическим классом отображения

$$g_\eta: X \rightarrow U, \quad (2)$$

где U — унитарная группа «бесконечного порядка». Обозначим $\eta = \gamma(g)$. Известно, что в кольце $K_c^*(X) = K_c^0(X) + K_c^1(X)$ имеет место умножение, подчиненное Z_2 -градуировке:

$$K_c^0 \cdot K_c^0 \subset K_c^0, \quad K_c^0 \cdot K_c^1 \subset K_c^1, \quad K_c^1 \cdot K_c^1 \subset K_c^0. \quad (3)$$

Теорема ⁽²⁾. Для односвязных компактных групп Ли G $K_c^*(G)$ не имеет кручения. Элементы $\eta_i \in K_c^1(G)$, задаваемые отображениями

$$\rho_i: G \rightarrow U(\dim \rho_i), \quad (4)$$

где ρ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, $n = \text{Rank } G$, образующие кольца представлений RG группы G , являются системой образующих в $K_c^*(G)$. Элементы η_i не имеют в $K_c^*(G)$ соотношений, за исключением

$$\eta_i \eta_j + \eta_j \eta_i = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Сделаем два существенных для нас замечания. 1) Наиболее интересными с геометрической точки зрения элементами $K_c^*(G)$ являются классы стабильной эквивалентности векторных расслоений над G , т. е. элементы из $K_c^0(G)$. Эти последние могут быть получены из образующих η_i в виде линейных комбинаций мономов от η_i , содержащих четное число сомножителей. Умножение $K_c^1 \cdot K_c^1 \subset K_c^0$ устроено довольно сложно и основано на теореме периодичности Ботта. 2) Известно, что всякое G -инвариантное векторное расслоение над G G -эквивалентно G -тривиальному расслоению. (Определение G -инвариантности и G -эквивалентности G -тривиальности см. ⁽¹⁾, стр. 131—139.)

Естественно поставить задачу о построении моделей векторных расслоений над G (или элементов $K_c^0(G)$). При этом, имея в виду замечание

2, интересно было бы выделить и построить модели тех элементов из $K^0(G)$, которые допускают возможно более широкую группу H (подгруппу G). Любопытно также указать и построить модели «наименее инвариантных» расслоений — не допускающих многомерных групп H или вовсе не допускающих никаких групп.

В предлагаемой работе мы в известной мере решаем эти задачи (теоремы 3, 4).

2. Итак, предметом изучения являются элементы $K_H(G)$ (⁽¹⁾, стр. 131—139) и порождающие их геометрические расслоения. Следует оговорить, что H -пространство G рассматривается в смысле естественного действия H на G (левые сдвиги). В (⁽¹⁾, стр. 132, показано, что всякое H -инвариантное расслоение ξ над G имеет вид

$$\xi = p^*\eta, \quad p: G \rightarrow G/H, \quad (5)$$

где η — произвольное расслоение над G/H .

Отправляясь от этого факта, будем строить модели пучков из $K_H(G)$ с помощью моделей пучков кольца $K^0(G/H)$. Последние возможно построить, используя результаты работ (³⁻⁵), в тех случаях, когда однородное пространство G/H является пространством нормального типа, см. определение ниже. Как следует из (⁶⁻⁸, ¹⁰), для подгрупп H с большим числом параметров, однородные пространства G/H имеют, как правило, нормальный тип. Симметрические пространства также являются пространствами нормального типа.

О п р е д е л е н и е. Для однородного пространства G/H обозначим: G_0 — максимальная полупростая в G , $\tilde{G}$ — односвязная накрывающая G_0 , $\tilde{H}$ локально изоморфна H и однозначно определена как подгруппа в $\tilde{G}$ локальным вложением $H \rightarrow G_0$. Однородное пространство G/H нормального положения (⁴, ⁹, ¹⁰) называется пространством нормального типа, если для некоторой системы образующих $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ кольца $R\tilde{G}$ нульмерных представлений $\tilde{G}$ существуют $r = \text{Rank } H$ элементов $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ кольца $R\tilde{H}$ нульмерных представлений $\tilde{H}$ таких, что

1) в $R\tilde{H}$ имеют место соотношения

$$P_j(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

где P_j — полиномы, α_i^* означает ограничение α_i на $\tilde{H}$;

2) $\text{Rank} \left\| \frac{\partial P_j}{\partial \alpha_k} \right\| = n$, $\text{Rank} \left\| \frac{\partial P_j}{\partial \psi_i} \right\| = r$ при $\alpha_i = 0$, $\psi_j = 0$, $i = 1, 2, \dots, r$; $j, k = 1, 2, \dots, n$;

3) при $\alpha_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, система уравнений (6) относительно переменных $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r$ имеет лишь нулевое решение в поле комплексных чисел.

Это определение является, может быть, более узким, чем определение пространства нормального типа, данное в (⁴). К сожалению, в доказательстве теоремы 1 (⁴) имеется дефект. Однако доказательство остается в силе, если принять определение, сформулированное выше. Заметим еще, что, по-видимому, обсуждаемые два определения эквивалентны.

Т е о р е м а 1 (⁴). Пусть G/H — пространство нормального типа, $\text{Rank } H = r$, $\text{Rank } G = n$.

Тогда существует $n - r$ нульмерных представлений Θ_i групп G_i , накрывающих G , таких, что для некоторых натуральных m_i корректно определены отображения

$$f^{m_i}(\Theta_i): G \rightarrow U, \quad f^{m_i}(\Theta) \tilde{g} = \underbrace{f(\Theta_i) \tilde{g} \cdot \dots \cdot f(\Theta_i) \tilde{g}}_{m_i \text{ раз}} \quad \tilde{g} \in G_i$$

и индуцируемые ими $f^{m_i}(\Theta_i): G/H \rightarrow U$. При этом $\gamma(f^{m_i}(\Theta_i))$, $i = 1, r, \dots, n - r$, составляет ту часть системы образующих $K^*(G/H) \otimes Q$, ко-

торая принадлежит $K^1(G/H) \otimes Q$ (система нечетномерных образующих).

Легко видеть, что для однородного пространства G/H нормального положения $(7-9)$ (а следовательно, и нормального типа) всякий элемент $\xi \in K_c^0(G/H) \otimes Q$, неразложимый по элементам из $K_c'(G/H) \otimes Q$, обладает свойством

$$p^*\eta = 0, \quad p: G \rightarrow G/H.$$

Таким образом, для пространств G/H нормального типа при вычислении образа отображения

$$p^*: K^0(G/H) \otimes Q \rightarrow K_H(G) \otimes Q$$

достаточно ограничиться элементами $K^0(G/H) \otimes Q$, разложимыми в сумму произведений элементов из $K^1(G/H)$. Эти последние в удобной форме описаны теоремой 1.

Очевидно, что попарные произведения образующих

$$\gamma(\Theta_1), \gamma(\Theta_2), \dots, \gamma(\Theta_{n-r}) - \gamma(\Theta_i)\gamma(\Theta_j), \quad i > j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n-r,$$

$n = \text{Rank } G, r = \text{Rank } H$, кольца $K^0(G/H) \otimes Q$, будучи подняты с помощью p^* в $K_H(G) \otimes Q$, задают в $K_H(G) \otimes Q$ мультипликативную систему образующих.

Теперь главной трудностью в построении моделей H -инвариантных пучков является построение модели произведения $\gamma(\Theta_i) \cdot \gamma(\Theta_j)$. Эта задача подробно рассмотрена в (5) . Напомним этот результат.

Теорема 2 (см. (5)). Элемент $\gamma(\Theta_i) \cdot \gamma(\Theta_j) \in K^0(G/H)$ стабильно эквивалентен геометрическому пучку над G/H , слой которого в каждой точке gH является ядром матрицы S в точке gH :

$$S(gH) = \begin{pmatrix} -\delta q_0 & \delta q_2 \\ -\delta q_0 & -E + \delta q_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E - 2\delta q_0 - \Lambda & 2\delta q_2 \\ -2\delta q_0 & -E + 2\delta q_2 - \Lambda \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь

$$q_0 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} y & iy \\ -iy & \bar{y} \end{pmatrix}, \quad q_1 = \begin{pmatrix} E + 1/2y & -xy \\ xy & E + 1/2\bar{y} \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} y & -iy \\ iy & \bar{y} \end{pmatrix};$$

$$\delta = (q_0 + q_1 + q_2)^{-1} = (E + \sigma)^{-1} \begin{pmatrix} E + \bar{y} & xy \\ -xy & E + y \end{pmatrix},$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} (E + \sigma)^{-1} [-i\sigma + \sqrt{4(E + \sigma)^2 - \sigma^2}], \quad \sigma = x\bar{x}y\bar{y};$$

$$x = ((\gamma(\Theta_i)(gH) - E) \otimes E, \quad y = E \otimes (\gamma(\Theta_j)(gH) - E),$$

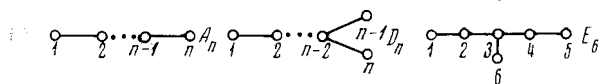
$$\bar{x} = ((\gamma(\Theta_i)(gH))^{-1} - E) \otimes E, \quad \bar{y} = E \otimes ((\gamma(\Theta_j)(gH))^{-1} - E).$$

Виртуальные представления $\gamma(\Theta_i)$, задающие нечетномерные образующие в $K^*(G/H) \otimes Q$, приведены в (4) для компактных неприводимых симметрических пространств G/H . (Разумеется, для тех G/H , у которых $K'(G/H) \otimes Q$ нетривиально, именно AI, AII, BDI, EI, EIV по терминологии Э. Картана.) Все перечисленные пространства были рассмотрены в односвязном варианте, за исключением BDI, моделью которого считается $SO(2n)/SO(2k+1) \otimes SO(2n-2k-1)$.

Выпишем эти виртуальные представления:

$$\begin{array}{llll} & & \gamma(\Theta_k) & \\ \text{AI} & SU(n)/SO(n) & P_k - P_{n-k}, & k < n-k \\ \text{AII} & SU(2n)/Sp(n) & P_k - P_{2n-k}, & k < 2n-k \\ \text{BD I} & SO(2n)/SO(2k+1) \times & P_{n-1}^2 - P_n^2 & \\ & \times SO(2n-2k-1) & & \\ \text{EI} & E_6/C_4 & P_1 - P_5, & P_2 - P_4 \\ \text{EIV} & E_6/E_4 & P_1 - P_5, & P_2 - P_4. \end{array} \quad (9)$$

Здесь P_k означает представление группы G симметрического пространства G/H , у которого все числовые отметки старшего веса по простым корням равны нулю, за исключением отметки по k -му простому корню, равной единице. Нумерация корней дана схемой



Объединяя все указанные теоремы, имеем

Теорема 3. *Модели образующих в $K_n(G) \otimes Q$ для подгрупп H , порождающих пространства нормального типа, могут быть получены в виде (8). Если G/H — симметрическое пространство, то в качестве $\gamma(\Theta_k)$ можно взять (9).*

Примечание. Для неодносвязных симметрических пространств справедлива аналогичная теорема, в которой $\gamma(\Theta_k)$ слегка модифицированы.

Известно, что среди неприводимых подгрупп классических групп самыми мощными по количеству параметров являются те, которые порождают симметрические пространства.

Следующим по мощности классом (неприводимых подгрупп в классических группах) являются подгруппы, порождающие несимметрические пространства с неприводимой группой вращений⁽⁶⁻⁸⁾. (Аналогичное утверждение справедливо, по-видимому, для всех простых групп Ли.)

Таким образом, вопрос о пучках на простых G , инвариантных относительно возможно более мощных подгрупп, связан с изучением пространств указанного типа. Большинство из этих пространств, как следует из⁽¹⁰⁾, являются пространствами нормального типа, так что изложенная выше техника построения моделей применима к рассматриваемым случаям. Заметим, что фактическое вычисление представлений γ_{Θ_k} для пространств, с неприводимой группой вращений и нормального типа является трудоемким (хотя нетрудно указать алгоритм).

В заключение приведем любопытный критерий того, что группа инвариантности заданного пучка на простой компактной G была не более, чем конечна.

Теорема 4. *Пусть $\xi \in K^0(G/H) \otimes Q$, $\xi \neq 0$, G -проста и компактна. Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

- 1) *Группа инвариантности пучка ξ не более, чем конечна.*
- 2) *Разложение характера Черна $\text{ch } \xi$ по примитивным образующим $H^*(G, Q)$ содержит член вида Ax_i , где x_i — моном, равный произведению нечетного числа примитивных образующих $H^*(G, Q)$, x_i — единственный в каждой простой группе трехмерный примитивный элемент в $H(G, Q)$, $A \neq 0$ — рациональное число.*

Московский кооперативный
институт

Поступило
21 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Ф. Атья, Лекции по K -теории, М., 1967. ² L. Hodgkinе, Topology, 6, 4, 1 (1967). ³ О. В. Мантуров, ДАН, 201, № 2, 1971. ⁴ О. В. Мантуров, ДАН, 202, № 5, 1972. ⁵ О. В. Мантуров, Изв. АН СССР, сер. матем., 35, 3, 627 (1971). ⁶ О. В. Мантуров, ДАН, 141, № 4, 1961. ⁷ О. В. Мантуров, ДАН, 141, № 5 (1961). ⁸ О. В. Мантуров, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, МГУ, 1966, стр. 13. ⁹ О. В. Мантуров, Математич. сборн., М., 1972. ¹⁰ Доан Купиль, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, МГУ, в. 14, 1968.