

В. И. ЗАЛЯПИН

ОБОБЩЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ C^n

(Представлено академиком И. Г. Петровским 31 III 1972)

В настоящей заметке изучаются свойства предложенных Л. А. Люстерником ^(1, 2) многомерных обобщений цилиндрических функций, естественно возникающих при решении некоторых задач теории массового обслуживания. Устанавливается связь между матричными элементами представления некоторых групп автоморфизмов C^n — n -мерного комплексного пространства — и обобщениями цилиндрических функций, что позволяет указать ряд свойств последних (см. ^(1, 2, 5)).

1. Рассмотрим E_{n-1} — $(n-1)$ -мерное евклидово пространство. Выберем в E_{n-1} систему n векторов $\{e_j\}_{j=1}^n$ таких, что каждые $n-1$ из них линейно независимы и $\sum_j e_j = 0$. Любой вектор $x \in E_{n-1}$ представим в виде $x = \sum_j x^j e_j$, причем $x = (x^j) = (x^j + c)$. Назовем каноническими барицентрическими координатами в E_{n-1} такие координаты вектора $x = (x^j)$, что $\sum x^j = 0$. Вектор $k = (k^j)$ назовем целочисленным, если все k^j целые.

Множество всех целочисленных векторов в E_{n-1} будем обозначать Ω_{n-1} .

2. Пусть $z = (z^1, z^2, \dots, z^n)$ — вектор из C^n — n -мерного комплексного пространства. Введем в C^n аналог полярной системы координат. Положим

$$z^j = \rho e^{i\varphi_j}, \quad \rho^n = z^1 \cdot z^2 \cdot \dots \cdot z^n, \quad \varphi_j = \ln \frac{z^j}{\rho}, \quad 0 \leq \text{Im } \varphi_j \leq 2\pi.$$

Заметим, что $\sum_j \varphi_j = 0$. Следуя ⁽²⁾, назовем ρ модулем вектора z (ρ определен неоднозначно), а (φ^j) — вектор-аргументом $\bar{\varphi}$ вектора $z \in C^n$. Ясно, что заданием чисел $\rho, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, $\sum_j \varphi_j = 0$ однозначно определяется вектор из C^n . C^n с таким образом определенной метрикой будем обозначать $H(C^n)$.

3. Движением $H(C^n)$ назовем неоднородное линейное преобразование n комплексных переменных, задаваемое соотношениями

$$(z^j)' = z^j e^{-\bar{\varphi}_j} + a^j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

где $a = (a^j) \in C^n$, $\bar{\varphi} = (\varphi_j)$, $\sum_j \varphi_j = 0$. Каждое движение задается $2n-1$ комплексным параметром. Множество всех движений $H(C^n)$ образует группу, которую в дальнейшем будем обозначать $G: \{g[a, \bar{\varphi}]\}$. Группу G можно реализовать как группу комплексных матриц $n+1$ порядка:

$$A(g) = \begin{pmatrix} e^{-\bar{\varphi}} & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Движения (1) с вектором $a = 0$ будем называть квазивращениями на вектор-аргумент $\bar{\varphi}$ и обозначать $h(\bar{\varphi}) = g[0, \bar{\varphi}]$. Непосредственно из (1)

для элементов группы G следует

$$g[\mathbf{a}, \bar{\psi}] \cdot g[\mathbf{b}, \bar{\varphi}] = g[\mathbf{a} + h(\bar{\psi})\mathbf{b}, \bar{\psi} + \bar{\varphi}], \quad (2)$$

$$g^{-1}[\mathbf{a}, \bar{\psi}] = g[-h(-\bar{\psi})\mathbf{a}, -\bar{\psi}],$$

$$g[\mathbf{a}, \bar{\varphi}] = h(-\arg \mathbf{a})g[\rho, 0]h(\bar{\psi} + \arg \mathbf{a}), \quad (3)$$

где $\rho = (\rho, \rho, \dots, \rho)$, ρ — модуль вектора $\mathbf{a}$.

Квазиповороты $h(\bar{\psi})$ образуют в G подгруппу H .

Отметим еще одну подгруппу G , а именно подгруппу A сдвигов на вектор $\mathbf{a} \in C^n$. Легко видеть, что G есть представитель широкого класса групп, являющихся полупрямым произведением коммутативной группы на группу своих автоморфизмов.

4. Рассмотрим подгруппу G_1 группы G , состоящую из элементов $g = g[\mathbf{a}, \bar{\psi}]$, где $\bar{\psi} = (i\psi, i\psi_2, \dots, i\psi_n)$, $\sum_j \psi_j = 0 \pmod{2\pi}$, $\mathbf{a} = (a^j) \in C^n$. Будем искать неприводимые представления группы G_1 . Следуя ⁽³⁾, орбитой вектора $\mathbf{z} \in H(C^n)$ назовем множество

$$\Gamma_c: z^1 \cdot z^2 \cdot \dots \cdot z^n = \rho^n = c. \quad (4)$$

Согласно Макки ⁽²⁾, неприводимые представления G_1 строятся в пространстве функций с интегрируемым квадратом на Γ_c по мере, инвариантной относительно квазивращений $h(\bar{\psi})$, и определяются параметром орбиты, характеристиками группы A и мерой на Γ_c .

Зададим в пространстве функций с интегрируемым квадратом на Γ_1 представления группы G_1 соотношением

$$(T_g^c f)(\mathbf{z}) = e^{c \cdot h(-\arg \mathbf{z})a} f(h(\bar{\psi})\mathbf{z}),$$

где $g = g[\mathbf{a}, \bar{\psi}]$, $\mathbf{z} \in \Gamma_1$, c — любое комплексное число. Используя (2), легко проверить, что $T_{g_1 g_2}^c = T_{g_1}^c \cdot T_{g_2}^c$, т. е. T_g^c — представления.

5. Всякая $\hat{f}(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \Gamma_1$, эквивалентна некоторой функции $f(\bar{\varphi})$, заданной на $(n-1)$ -мерном торе. Действительно, в силу (4), имеем

$$\hat{f}(\mathbf{z}) = \hat{f}(e^{i\varphi_1}, \dots, e^{i\varphi_n}) = f(\varphi_1, \dots, \varphi_n).$$

В пространстве функций на торе T со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f \bar{g} d\tau \quad (5)$$

и таких, что $(f, f) < +\infty$ представления T_g^c задаются соотношением

$$(T_g^c f)(\bar{\varphi}) = e^{ch(-\bar{\varphi})\mathbf{a}} \cdot f(\bar{\varphi} - \bar{\psi}).$$

Легко видеть, что система функций $e_{\mathbf{k}}(\bar{\varphi}) = e^{i\mathbf{k}\bar{\varphi}}$, $\mathbf{k} \in \Omega_{n-1}$, полна в пространстве функций с интегрируемым квадратом на T и ортонормирована относительно (5). Выберем $\{e_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \Omega_{n-1}}$ в качестве базиса в $L^2(T)$. Тогда матричные элементы представлений T_g^c будут

$$t_{\mathbf{k}\mathbf{l}}(g) = (T_g^c e_{\mathbf{k}}, e_{\mathbf{l}}).$$

Принимая во внимание выражение (5) для скалярного произведения в $L^2(T)$, получим

$$t_{\mathbf{k}\mathbf{l}}(g) = \frac{e^{-i\mathbf{k}\bar{\psi}}}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \exp[ch(-\bar{\varphi})\mathbf{a} + i(\mathbf{k} - \mathbf{l})\bar{\varphi}] d\tau.$$

Обозначим (см. (1, 5))

$$U_k(z) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \exp \left[\sum_j z^j \cdot e^{i\varphi_j} - ik\bar{\varphi} \right] d\tau,$$

$k \in \Omega_{n-1}$, (φ_j) — канонические барицентрические координаты вектора $\bar{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ в E_{n-1} , $z = (z^j)$. Получим

$$t_{kL}^c(g) = e^{-ik\bar{\varphi}} U_{L-k}(c \cdot a).$$

6. Положив $g_1 = g[a, 0]$, $g_2 = g[b, 0]$ и учитывая, что

$$t_{kL}^c(g_1 g_2) = \sum_{M \in \Omega_{n-1}} t_{kM}^c(g_1) \cdot t_{ML}^c(g_2),$$

получим

$$U_{L-k}(z_1 + z_2) = \sum_{M \in \Omega_{n-1}} U_{M-k}(z_1) \cdot U_{L-M}(z_2).$$

Легко видеть, что чистым квазивращениям соответствует диагональная матрица $T_{h(\bar{\varphi})}^c$, на главной диагонали которой стоят элементы $\exp(-ik\bar{\varphi})$. Отсюда, учитывая (3),

$$t_{cL}(g) = e^{-ik\bar{\varphi} + (L-k)\bar{\alpha}} \cdot U_{L-k}(r), \quad r = c\varrho,$$

$g = g[a, \bar{\varphi}]$, $\bar{\alpha} = \arg a$, или

$$U_k(z) = e^{k\bar{\alpha}} U_k(r), \quad \bar{\alpha} = \arg z.$$

Для случая $n=2$ приведенная схема изучения функций $U_k(z)$ лишь формально отличается от схемы, примененной в (4) для изучения функций Бесселя $J_n(z) = U_{n0}(z/2)$, обобщениями которых являются функции $U_k(r)$.

7. Изучая неприводимые представления подгруппы G_2 группы G с элементами $g[a, \bar{\varphi}]$, $\bar{\varphi} \in E_{n-1}$, удается получить некоторые соотношения для функций $U_\mu(z)$, где μ — не обязательно целочисленный вектор-индекс, почти теми же методами, как это сделано для бесселевых функций с произвольным индексом в (4).

В заключение автор выражает благодарность чл.-корр. АН СССР Л. А. Люстернику за постановку задачи и обсуждение результатов, а также А. И. Штерну за полезные собеседования.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
27 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. А. Люстерник, ДАН, 177, № 5, 1005 (1967). ² Л. А. Люстерник, УМН, 25, № 4, 11 (1970). ³ Г. Дж. Макки, Сборн. пер. Математика, 6, № 6, 57 (1962). ⁴ Н. Я. Виленин, Специальные функции и теория представлений групп, «Наука», 1965. ⁵ В. И. Залипин, Сборн. Математические вопросы управления производством, М., в. 4, 36 (1972).