

УДК 517.9:513.88

МАТЕМАТИКА

Б. С. ПАВЛОВ

О НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ РЕЗОНАНСОВ НА НЕФИЗИЧЕСКОМ ЛИСТЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 III 1972)

1. Пусть L — самосопряженный в $L_2(-\infty, \infty)$ оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$lu = -u'' + qu. \quad (1)$$

Мы считаем, что «потенциал» $q(x)$ равен нулю при $x < 0$ и в достаточной степени произволен при $x > 0$, однако таков, что оператор L_1 , порожденный в $L_2(0, \infty)$ дифференциальным выражением (1) и однородным условием Неймана в нуле, является положительным. Через L_0 мы обозначим оператор, порожденный в $L_2(-\infty, 0)$ дифференциальным выражением l и тем же граничным условием в нуле.

В настоящей заметке мы исследуем процесс рассеяния плоских волн вида $\exp(ikx)$, падающих из $-\infty$ на потенциал q . Оказывается, в этом случае спектр резонансов, наблюдаемых при рассеянии, содержит непрерывную компоненту. Структура ее такова же, как и структура абсолютно непрерывного спектра самосопряженного оператора L_1 . Далее мы формулируем теорему разложения по резонансным состояниям и, решая некоторую новую задачу рассеяния, описываем процесс развития во времени волновых пакетов, составленных из резонансных состояний, отвечающих непрерывному спектру.

Следуя ⁽¹⁾, свяжем с операторами L , L_0 , L_1 группы U_t , U_t^0 , U_t^1 , порожденные соответствующими гиперболическими уравнениями вида $u_{tt} + lu = 0$. Эти группы унитарны в «энергетических» пространствах данных Коши $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$, метрика которых согласована с операторами L , L_0 , L_1 . Например,

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} [L(u, u) + (u_1, u_1)].$$

Здесь через $L(u, u)$, (u_1, u_1) обозначены соответственно квадратичная форма оператора L и скалярное произведение в $L_2(-\infty, \infty)$. Можно считать, что $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ изометрически вложены в $\mathcal{H}$. При этом $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Легко проверяется также, что группы U_t , U_t^0 обладают общими приходящими и уходящими подпространствами $D_{\pm}$, составленными из данных Коши, порождающих на левой полуоси приходящие $u(x-t)$ и уходящие $u(x+t)$ решения уравнения $u_{tt} + lu = 0$.

2. Пусть $\chi_{\pm}(x, k)$ — решения уравнения $lu = k^2u$, $-\infty < x < \infty$, обрастающие при $x < 0$ в $\exp(\pm ikx)$ соответственно. Решения $\chi_{\pm}(x, k)$ линейно независимы при $k \neq 0$ и в силу полуограниченности оператора L из них можно единственным образом составить линейную комбинацию $\chi_{+}(x, k) + S\chi_{-}(x, k)$, принадлежащую $L_2(0, \infty)$ при $\text{Im } k > 0$. Коэффициент $S = S(k)$, стоящий перед $\chi_{-}(x, k)$ в этой линейной комбинации, будем называть коэффициентом отражения плоских волн.

Он просто выражается через функции Вейля $m_1(k^2)$, $m_0(k^2)$ операторов L_1 , L_0 :

$$S(k) = \frac{m_1(k^2) - m_0^{-1}(k^2)}{m_1(k^2) + m_0^{-1}(k^2)}. \quad (2)$$

Здесь $m_0(k^2) = -ik$, так как $q(x) = 0$, $x < 0$. Из формулы (2) с использованием известных свойств функции Вейля (см. (2)), легко получается

Лемма 1. Коэффициент отражения $S(k)$ есть ограниченная регулярная функция в верхней полуплоскости, $|S(k)| < 1$, $\text{Im } k > 0$. На множестве точек вещественной оси R , дополненном к образу σ абсолютно непрерывного спектра оператора L_1 (т. е. к множеству, где $\text{Im } m_1(k^2) \neq 0$), предельные значения $S(k)$ почти всюду унитарны. Функция $S(k)$ аналитически продолжается через интервалы множества $R \setminus \sigma$ в нижнюю полуплоскость $\text{Im } k < 0$ по принципу симметрии: $S(k) = [\overline{S(\bar{k})}]^{-1}$.

Коэффициент отражения $S(k)$ является важной характеристикой оператора L . В частности, как видно из формулы (2), он однозначно определяет спектральную меру оператора L_1 и, следовательно, по нему можно восстановить потенциал $q(x)$, пользуясь методами обратной задачи спектрального анализа (3). Он участвует также в спектральном представлении группы U_t :

Теорема 1. Группа U_t унитарно эквивалентна группе умножения на $\exp(ikt)$, действующей в пространстве двухкомпонентных вектор-функций $\tilde{\mathcal{H}} = L_2(R, \rho)$ с матричным весом

$$\rho(k) = \begin{pmatrix} 1 & \overline{S(k)} \\ S(k) & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие формулы обращения на плотном множестве гладких финитных данных $\begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ записываются в виде

$$\tilde{\mathcal{U}}(k) = \begin{pmatrix} ik(u, \chi_+(\cdot, k)) + (u_1, \chi_+(\cdot, k)) \\ ik(u, \chi_-(\cdot, k)) + (u_1, \chi_-(\cdot, k)) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{ik} \chi_+(x, k) & \frac{1}{ik} \chi_-(x, k) \\ \chi_+(x, k) & \chi_-(x, k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \overline{S(k)} \\ S(k) & 1 \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{U}}(k) dk.$$

Здесь $S(k) \equiv \lim (k + i\epsilon)$.

Из формул обращения видно, что спектр генератора L группы U_t абсолютно непрерывен на промежутке $(-\infty, \infty)$ и двукратен на множестве $\text{In } t\sigma$.

В спектральном представлении (3) группы U_t подпространствам $\mathcal{D}_{\pm}$, $\mathcal{H}_{\pm}$, отвечают подпространства

$$\tilde{\mathcal{D}}_+ = \begin{pmatrix} H_+^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{D}}_- = \begin{pmatrix} 0 \\ H_-^2 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} : Sf + g \in H_+^2, f + \bar{S}g \in H_-^2 \right\}.$$

Отметим, что подпространства $\tilde{\mathcal{H}}_{\pm} \subset \tilde{\mathcal{H}}$,

$$\tilde{\mathcal{H}}_{\pm} = \bigcup_{(t)} \tilde{U}_t \tilde{\mathcal{D}}_{\pm},$$

приводят группу $\tilde{U}_t$, части ее $\tilde{U}_t^{\pm}$ в этих подпространствах имеют простой спектр и метрика, индуцированная в $\tilde{\mathcal{H}}_{\pm}$ из основного пространства $\tilde{\mathcal{H}}$, совпадает с обычной метрикой в $L_2(-\infty, \infty)$. Подпространства $\tilde{\mathcal{D}}_{\pm}$ (и, очевидно, $\mathcal{D}_{\pm}$) взаимно ортогональны. Это уже не так для подпространств

$\tilde{\mathcal{H}}_{\pm}$. Пусть $\Delta \subset R$ и

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{H}}_+(\Delta) &= \left\{ \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} : f \in L_2(-\infty, \infty), \text{supp } f \subset \Delta \right\}, \\ \tilde{\mathcal{H}}_-(\Delta) &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix} : g \in L_2(-\infty, \infty), \text{supp } g \subset \Delta \right\}.\end{aligned}$$

Тогда, оказывается, во всех точках непрерывности $S(k)$, $k \in R$, выполнено*:

$$\lim_{\Delta \rightarrow (k)} \cos(\tilde{\mathcal{H}}_+(\Delta), \tilde{\mathcal{H}}_-(\Delta)) = |S(k)|.$$

Наряду с группой U_t рассмотрим полугруппу

$$Z_t = P_{\mathcal{H}_1} U_t P_{\mathcal{H}_1}, \quad t > 0.$$

Теорема 2. Полугруппа Z_t является полугруппой вполне неунитарных сжатий⁽⁵⁾. Ее производящий оператор B_+ , $\exp(iB_+t) = Z_t$, диссипативен, имеет одномерные дефектные подпространства**, и его характеристическая функция совпадает с коэффициентом отражения. Спектр оператора B_+ совпадает с множеством точек комплексной плоскости переменной k , где нарушается регулярность функции $S^{-1}(k)$.

Следствие. В силу леммы 1, спектр оператора B_+ содержит не более чем счетное множество точек (собственных чисел), лежащих в верхней полуплоскости и совпадающих с нулями $S(k)$, и множество $\sigma \subset R$, которое совпадает с абсолютно непрерывным спектром генератора $\mathcal{L}_1$ группы U_t^1 .

Собственные функции, отвечающие дискретному и непрерывному спектру оператора B_+ , носят название резонансных состояний и имеют вид

$$\psi(x, k) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{ik} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_+(x, k), & x > 0, \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{ik} \\ 0 \end{pmatrix}, & x < 0. \end{cases}$$

Здесь $k \in \sigma$ (непрерывный спектр) или $k = k_m$, $\text{Im } k_m > 0$, — корень функции $S(k)$ (дискретный спектр). Ввиду диссипативности B_+ и полной неунитарности $Z(t)$ оператор B_+ не имеет собственных чисел на вещественной оси.

Биортогональную к $\{\psi\}$ систему образуют собственные функции оператора $B_- = -B_+^*$, отвечающие собственным числам $-\bar{k}_m$, $-k$ и получающиеся заменой в выражениях для $\{\psi\}$ $\chi_+(x, k)$ на $\chi_-(x, \bar{k})$.

Теорема 3. Если $|S(k)| > 0$, $k \in R$, и все комплексные нули $S(k)$ просты, то связанные с оператором B_+ формулы обращения*** имеют вид

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix}(x) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(\bar{S}(k) - \frac{1}{S(k)} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{ik} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_+(x, k) \bar{u}(k) dk - \\ &- \frac{1}{4\pi} \sum_m \frac{1}{S'(k_m)} \begin{pmatrix} \frac{1}{ik_m} \\ 1 \end{pmatrix} \chi_+(x, k_m) \bar{u}_m, \quad x > 0, \\ \bar{u}(k) &= (iku + u_1, \chi_-(\cdot, k)), \quad \bar{u}_m = (ik_mu + u_1, \chi_-(\cdot, \bar{k}_m)).\end{aligned}$$

* Имеется в виду косинус минимального угла между $\tilde{\mathcal{H}}_{\pm}(\Delta)$ (см. (4)).

** Т. е. $\dim(B_+ - B_+^*)\mathcal{H} = 1$.

*** Здесь не утверждается сходимость ряда по собственным числам. Качество этой сходимости сильно зависит от конкретного вида потенциала.

3. Для пары операторов B_+ , $\mathcal{L}_1$, обладающих одинаковым абсолютно непрерывным спектром, рассмотрим задачу рассеяния. Допустим, что коэффициент отражения непрерывен и не имеет корней на вещественной оси. Сузим оператор B_+ на подпространство, отвечающее его вещественному (абсолютно непрерывному) спектру. Полученный оператор B_+^a будем сравнивать с абсолютно непрерывной частью $\mathcal{L}_1^a$ оператора $\mathcal{L}_1$. Имеет место

Теорема 4. При сделанных предположениях относительно коэффициента отражения оператор B_+^a подобен оператору $\mathcal{L}_1^a$. Это подобие осуществляется с помощью (ограниченных и обратимых) волновых операторов

$$\begin{aligned} W_+(\mathcal{L}_1^a, B_+^a) &= \text{s-lim}_{t \rightarrow +\infty} \exp(-i\mathcal{L}_1^a t) \exp(iB_+^a t) = \\ &= \frac{1}{2} T_{\mathcal{L}_1}^{-1} (1 - \bar{S}) (1/S) T_{B_+}, \\ W_-(\mathcal{L}_1^a, B_+^a) &= -\frac{1}{2} T_{\mathcal{L}_1}^{-1} (1 - S) (\bar{S}/S) T_{B_+}, \end{aligned}$$

где через $T_{\mathcal{L}_1}$, T_{B_+} обозначены операторы, осуществляющие спектральные представления для абсолютно непрерывных частей операторов

$$\begin{aligned} T_{B_+} \begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix} &= (iku + u_1, \chi_-(\cdot, k)), \\ T_{\mathcal{L}_1} \begin{pmatrix} u \\ u_1 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2} (iku + u_1, \chi_+(\cdot, k) + \chi_-(\cdot, k)). \end{aligned}$$

В спектральном представлении оператора B_+^a оператор рассеяния $W_+^{-1}W_-$ действует как оператор умножения на функцию

$$\mathfrak{S}_{\mathcal{L}_1 B_+}(k) = -\frac{1 - S(k)}{1 - \bar{S}(k)} \bar{S}(k), \quad k \in \sigma.$$

Последняя теорема показывает, что развитие во времени волнового пакета, составленного из резонансных состояний, отвечающих непрерывному спектру оператора B_+ , происходит асимптотически так же, как и развитие волнового пакета, «отрезанного» от приходящих и уходящих каналов $\mathcal{D}_{\pm}$ с помощью самосопряженного граничного условия $y'(0) = 0$.

Теорема 5. Матрица рассеяния для пары операторов $(L_0 \oplus L_1, L)$ в спектральном представлении оператора L , связанном с фундаментальной системой собственных функций непрерывного спектра $\{\chi_-(\cdot, k), \chi_+(\cdot, k) + S(k)\chi_-(\cdot, k)\}$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} S(k) & 1 - |S(k)|^2 \\ \frac{1 - S(k)}{1 - \bar{S}(k)} & -\bar{S} \frac{1 - S(k)}{1 - \bar{S}(k)} \end{pmatrix}.$$

Она унитарна в метрике, заданной формой

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - |S(k)|^2 \end{pmatrix} e, e \right\rangle.$$

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Ждапова

Поступило
25 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Лакс, Р. Филлипс, Теория рассеяния, М., 1971. ² Э. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, 1, ИЛ, 1960. ³ И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 309 (1951). ⁴ И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965. ⁵ Б. С. Надь, Ч. Фояш, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, 1970.