ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

4

АПРЕЛЬ

1974

XX

ЖУРНАЛ ПРИКЛАДНОЙ СПЕКТРОСКОПИИ

Том XX, выпуск 4 Апрель 1974 г.

УДК 535.5

Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков

К ТЕОРИИ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

1. В рамках подхода теории пространственной дисперсии, систематически изложенной, например, в работах [1, 2], явление естественной оптической активности описывается посредством добавочного члена в диэлектрическом тензоре, линейного по волновому вектору. При этом обычно развиваемый подход не является достаточно общим и полным, поскольку он с самого начала сводится к рассмотрению плоских волн и предполагает среду неограниченной в пространстве и однородной [1].

Более полное в этом смысле рассмотрение дано в работе [3], где материальное уравнение взято в форме

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j + \gamma_{ikj}\partial_k E_j,$$

пригодной, однако, лишь для описания однородных сред. Для неоднородной среды при изменяющихся в пространстве параметрах, как уже отмечалось [4], единственным возможным обобщением такой связи будет соотношение

$$D_i = \varepsilon_{ij}E_j + \alpha_{ikj}\partial_k E_j + \partial_k(\beta_{ikj}E_j). \tag{1}$$

В работе [4] было показано, что при отсутствии поглощения тензоры α_{ikj} и β_{ikj} определенным образом связаны друг с другом. В связи с обсуждением этого вопроса в [5—8] представляется целесообразным вернуться к более детальному анализу уравнения (1).

2. В соответствии с принципом симметрии кинетических коэффициентов, согласно [3], имеем

$$\int \mathbf{E}'\mathbf{D}''dV = \int \mathbf{E}''\mathbf{D}'dV, \tag{2}$$

где $\mathbf{E}'$, $\mathbf{E}''$ — два различных набора значений величины $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}'$, $\mathbf{D}''$ — соответствующие им наборы значений величины $\mathbf{D}$; интегрирование проводится по всему пространству, занимаемому полем. Подставляя (1) в (2), учитывая симметрию ε_{ij}, производя интегрирование по частям слагаемых, содержащих β_{ikj}, и учитывая отсутствие поля на бесконечности, приходим к соотношению

$$\int(\alpha_{ikj}E'_i\partial_k E''_j - \beta_{ikj}E''_j\partial_k E'_i)\,dV = \int(\alpha_{ikj}E''_i\partial_k E'_j - \beta_{ikj}E'_j\partial_k E''_i)\,dV,$$

которое можно переписать следующим образом:

$$\int(\alpha_{ikj} + \beta_{jki})(E'_i\partial_k E''_j - E''_i\partial_k E'_j)\,dV = 0.$$

Ввиду произвольности $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{E}''$ следует

$$\alpha_{ikj} = -\beta_{jki}, \tag{3}$$

и связь (1) принимает вид

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j + \alpha_{ikj} \partial_k E_j - \partial_k (\alpha_{jki} E_j). \tag{4}$$

Для изотропной среды, в частности, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \delta_{ij}$, $\alpha_{ikj} = \alpha_0 e_{ikj}$ (e_{ikj} — тензор Леви — Чивита), и из (4) имеем

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \alpha_0 \operatorname{rot} \mathbf{E} + \operatorname{rot} \alpha_0 \mathbf{E}. \tag{5}$$

Таким образом, оптическая активность неоднородной изотропной среды, как следует из принципа симметрии кинетических коэффициентов, описывается единственным псевдоскаляром α_0. Поэтому соотношение вида

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \delta_{\mathrm{I}} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \operatorname{rot} \delta_{\mathrm{II}} \mathbf{E}$$

при $\delta_{\mathrm{I}} \neq \delta_{\mathrm{II}}$ вопреки мнению авторов работ [6, 7] недопустимо даже при наличии поглощения в среде.

3. Обратимся теперь к рассмотрению непоглощающей неоднородной среды. Требование отсутствия поглощения

$$\int \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial t} + \mathbf{E}^* \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) dV = 0$$

для монохроматических волн приводит к условию [3]

$$\int (\mathbf{E}\mathbf{D}^* - \mathbf{E}^*\mathbf{D})\, dV = 0. \tag{6}$$

Подставляя в (6) выражение для $\mathbf{D}$, согласно (4), и учитывая симметричность и вещественность тензора диэлектрической проницаемости в отсутствие поглощения, получим в результате интегрирования по частям членов, содержащих производные α_{ijk},

$$\int (\alpha^*_{ikj} - \alpha_{ikj}) (E_i \partial_k E^*_j + E^*_i \partial_k E_j)\, dV = 0,$$

откуда следует условие

$$\alpha^*_{ikj} = \alpha_{ikj}. \tag{7}$$

Следовательно, оптическая активность неоднородных сред в отсутствие поглощения может быть описана материальным уравнением (4) с вещественным тензором α_{ikj} третьего ранга.

Заметим, что при неизменяющемся в пространстве α_{ikj}, вводя γ_{nk}, согласно

$$\alpha_{ikj} - \alpha_{jki} = -\gamma_{nk} e_{nij}, \tag{8}$$

связь (4) можно записать в виде [9]

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + [\gamma \nabla, \mathbf{E}], \tag{9}$$

где для описания оптической активности достаточно уже псевдотензора второго ранга $\gamma = (\gamma_{nk})$.

Установим теперь форму закона сохранения энергии, т. е. определим вид выражений для плотности энергии и плотности потока энергии поля в оптически активной неоднородной среде, описывающейся связью (4). С этой целью представим вытекающее из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

соотношение

$$-c \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{B}] = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{10}$$

в форме уравнения непрерывности. В силу симметричности тензора ε прежде всего имеем

$$\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{B}) + $$
$$+ E_i \alpha_{ikj} \partial_k \frac{\partial}{\partial t} E_j - E_i \partial_k \left(\alpha_{jki} \frac{\partial}{\partial t} E_j \right). \tag{11}$$

Далее остается представить выражение

$$A = E_i \alpha_{ikj} \partial_k \frac{\partial}{\partial t} E_j - E_i \partial_k \left(\alpha_{jki} \frac{\partial}{\partial t} E_j \right)$$

в виде суммы дивергенции некоторого вектора и производной по времени некоторого скаляра. В результате тождественных преобразований представим A в виде

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E_i \alpha_{ikj} \partial_k E_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial E_i}{\partial t} \alpha_{ikj} \partial_k E_j - \frac{1}{2} E_j \partial_k \left(\alpha_{ikj} \frac{\partial E_i}{\partial t} \right) +$$
$$+ \frac{1}{2} \partial_k \left(E_i \alpha_{ikj} \frac{\partial E_j}{\partial t} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial E_i}{\partial t} \partial_k (\alpha_{jki} E_j) - \frac{1}{2} E_i \partial_k \left(\alpha_{jki} \frac{\partial E_j}{\partial t} \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{ E_i (\alpha_{ikj} \partial_k E_j - \partial_k (\alpha_{jki} E_j)) \} + \frac{1}{2} \partial_k \left\{ E_i \frac{\partial E_j}{\partial t} (\alpha_{ikj} - \alpha_{jki}) \right\},$$

или, принимая во внимание (8),

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{ E_i (\alpha_{ikj} \partial_k E_j - \partial_k (\alpha_{jki} E_j)) \} - \frac{1}{2} \operatorname{div} \left(\tilde{\gamma} \left[\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] \right).$$

Теперь воспользуемся тождеством[1]

$$\tilde{\gamma} \mathbf{E}^\times + \mathbf{E}^\times \gamma = \{ (\gamma_c - \gamma) \mathbf{E} \}^\times$$

и преобразуем выражение $\tilde{\gamma} \left[\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right]$:

$$\tilde{\gamma} \left[\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = \tilde{\gamma} \mathbf{E}^\times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \{ ((\gamma_c - \gamma) \mathbf{E})^\times - \mathbf{E}^\times \gamma \} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} =$$
$$= -\left[\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, (\gamma_c - \gamma) \mathbf{E} \right] - \left[\mathbf{E}, \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = -\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}, (\gamma_c - \gamma) \mathbf{E}] +$$
$$+ \left[\mathbf{E}, (\gamma_c - \gamma) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] - \left[\mathbf{E}, \gamma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}, \gamma \mathbf{E}] +$$
$$+ 2 \left[\mathbf{E}, \left(\frac{1}{2} \gamma_c - \gamma \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right].$$

В результате можем записать

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \{ E_i \alpha_{ikj} \partial_k E_j - E_i \partial_k (\alpha_{jki} E_j) - \operatorname{div} [\mathbf{E}, \gamma \mathbf{E}] \} -$$
$$- \operatorname{div} \left[\mathbf{E}, \left(\frac{1}{2} \gamma_c - \gamma \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right].$$

[1] $\mathbf{F}^\times$ — символическая запись антисимметричного псевдотензора второго ранга, дуального вектору $\mathbf{F}$; $\gamma_c = \operatorname{Sp} \gamma$, $(\tilde{\gamma})_{ij} = \gamma_{ji}$.

Далее заметим, что из (8) следует соотношение

$$\gamma_{nk} = -e_{nij}\alpha_{ihj}, \tag{12}$$

используя которое легко получить

$$\operatorname{div}[\mathbf{E},\ \gamma\mathbf{E}] = -E_i E_j \partial_h (\alpha_{kji} - \alpha_{ijk}) - (\alpha_{kij} + \alpha_{kji} - \alpha_{ijk} - \alpha_{jik}) E_i \partial_h E_j.$$

При этом

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\{\sigma_{ijk}E_i\partial_k E_j + E_i E_j \partial_k (\alpha_{kji} - \alpha_{ijk} - \alpha_{jki})\} - $$

$$-\operatorname{div}\left[\mathbf{E}, \left(\frac{1}{2}\gamma_c - \gamma\right)\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right],$$

где тензор

$$\sigma_{ijk} = \alpha_{kij} + \alpha_{kji} + \alpha_{ikj} - \alpha_{ijk} - \alpha_{jik} - \alpha_{jki} \tag{13}$$

антисимметричен по двум последним индексам. Благодаря последнему обстоятельству можем записать

$$\sigma_{ijk} = \varkappa_{in} e_{njk}, \tag{14}$$

так что

$$\sigma_{ijk}E_i\partial_k E_j = -\mathbf{E}\varkappa \operatorname{rot}\mathbf{E} = \frac{1}{c}\mathbf{E}\varkappa\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

и окончательно

$$A = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{c}\mathbf{E}\varkappa\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + E_i E_j \partial_k (\alpha_{kji} - \alpha_{ijk} - \alpha_{jki})\right\} -$$

$$-\operatorname{div}\left[\mathbf{E}, \left(\frac{1}{2}\gamma_c - \gamma\right)\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right]. \tag{15}$$

Подставляя теперь (11) в (10) и учитывая (15), получим закон сохранения энергии $\operatorname{div}\mathbf{S} = -\partial w/\partial t$ с вектором Пойнтинга [5]

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E}, \left\{\mathbf{B} - \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\gamma_c - \gamma\right)\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right\}\right] \tag{16}$$

и плотностью энергии

$$w = \frac{1}{8\pi}\left\{\mathbf{E}\left(\varepsilon\mathbf{E} + \frac{1}{c}\varkappa\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) + \mathbf{BB} + E_i E_j \partial_k (\alpha_{kji} - \alpha_{ijk} - \alpha_{jki})\right\}. \tag{17}$$

Векторы **E** и **B** как силовые характеристики поля естественно считать конечными во всем пространстве, включая и те точки, где свойства среды резко изменяются, как это имеет место на границе двух сред. В этом случае представляется естественным потребовать, чтобы в таких особых точках и плотность энергии поля оставалась конечной величиной. Это требование влечет за собой необходимость в (17) обращения в нуль членов, содержащих пространственные производные α_{ijk}:

$$E_i E_j \partial_k (\alpha_{kji} - \alpha_{ijk} - \alpha_{jki}) = 0,$$

что в свою очередь приводит к ограничению

$$\alpha_{ikj} = -\alpha_{ijk} = \alpha_{in}e_{nkj}, \tag{18}$$

где α_{in} — некоторый псевдотензор второго ранга. При этом для (13) имеем

$$\sigma_{ijk} = -2\alpha_{ijk}$$

и, согласно (14), (18),

$$\varkappa = -2\alpha,$$

а также в свою очередь из (12), (18)

$$\gamma = \alpha_c - \tilde{\alpha}, \quad \alpha = \frac{1}{2}\gamma_c - \tilde{\gamma}.$$

В результате материальное уравнение для неоднородной оптически активной среды принимает окончательный вид [4, 5]

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \alpha \operatorname{rot}\mathbf{E} + \operatorname{rot}\tilde{\alpha}\mathbf{E},$$

а вектор Пойнтинга и плотность энергии будут определяться соответствующими выражениями [4].

Литература

1. В. П. Силин, А. А. Рухадзе. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. М., Атомиздат, 1961.
2. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., «Наука», 1965.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. М., Физматгиз, 1959.
4. Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Федоров, Н. А. Хило. Кристаллография, **18**, 227, 1973.
5. Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков. ЖЭТФ, **61**, 1808, 1971.
6. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург. ЖЭТФ, **63**, 838, 1971.
7. В. Л. Гинзбург. УФН, **108**, 749, 1972.
8. Ф. И. Федоров. УФН, **108**, 762, 1972.
9. Ф. И. Федоров. Опт. и спектр., **6**, 85, 1959.
10. V. M. Agranovich, V. I. Yudson. Opt. Commun., **9**, 58, 1973.
11. Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Федоров. ЖПС, **19**, 377, 1973.

Поступило в редакцию ЖЭТФ 15 апреля 1973 г.

Примечание при корректуре. В статье [10] воспроизводится основной результат пп. 1 и 2 настоящей работы, полученной редакцией ЖЭТФ на два месяца раньше поступления [10]. Авторы работы [10] также приходят к выводу о равенстве параметров оптической активности δ_{I} и δ_{II}, принимая этим самым полностью нашу точку зрения (см. [5—8, 11]).