

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

С. Г. ОВСЕПЯН

## ОБ ОДНОМ НОВОМ СПОСОБЕ ПОСТРОЕНИЯ РАСШИРЕНИЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 23 II 1972)

Первоначальные исследования в теории расширений топологических пространств велись в основном теоретико-функциональными или родственными методами (<sup>1-5</sup>).

В работе (<sup>6</sup>) П. С. Александров дал новый метод построения расширений топологических пространств, известный под названием метода центрированных систем открытых множеств, и применил его, в частности, к новому построению максимального бикompактного, или стоуп-чеховского, расширения  $\beta X$  вполне регулярного пространства  $X$ . Этот метод, будучи весьма плодотворным и универсальным, впоследствии широко применялся многими математиками (см., например, (<sup>5-8</sup>)). В последнее время в теории расширений топологических пространств В. И. Зайцев (<sup>9, 10</sup>) успешно применяет также метод проекционных спектров.

В настоящей заметке всюду имеются в виду только такие расширения топологических пространств, в которых гомеоморфный образ расширяемого пространства представляет собой плотное открытое подпространство.

Способ построения расширений топологических пространств, приведенный в этой заметке, основывается на понятиях псевдотопологии и псевдотопологического пространства, которые введены и изучены в (<sup>11</sup>). Для полноты изложения приведем некоторые используемые в этой заметке определения из (<sup>11</sup>).

**Определение 1.** Назовем псевдотопологией (п.т.) пару  $(U, >)$ , состоящую из непустого множества  $U$  и отношения частичного упорядочения  $>$  на  $U$ , которая удовлетворяет следующим условиям:

- a)  $u_1, u_2 \in U, u_1 > u_2 \text{ и } u_2 > u_1 \Rightarrow u_1 = u_2$ ;
- b)  $\forall u \in U \quad u > u$ , т. е. отношение  $>$  рефлексивно;
- c)  $U$  ограничено сверху и снизу;
- d)  $U$  полное.

В дальнейшем (когда это не может вызвать недоразумения) мы будем опускать символ  $>$  и обозначать п.т. через  $U$ .

**Определение 2.** Псевдообъединением элементов  $u_\alpha \in U$  для всех  $\alpha$ , принадлежащих произвольному индексному множеству  $A$ , назовем  $\sup \{u_\alpha : \alpha \in A\}$  и обозначим символом  $\bigcup_{\alpha \in A} u_\alpha$ .

Аналогично, псевдопересечением элементов  $u_j \in U$  для всех  $j$ , принадлежащих любому конечному множеству индексов  $J$ , назовем  $\inf \{u_j : j \in J\}$  и обозначим символом  $\bigcap_{j \in J} u_j$ .

Ясно, что топология любого топологического пространства с отношением обратного включения  $\supset$  представляет собой п.т.

**Определение 3.** Непустое подмножество  $m \subset U$  назовем фильтром п.т.  $U$ , если оно удовлетворяет следующим условиям:

- F<sub>1</sub>)  $\theta_U \notin m$ , где  $\theta_U$  — наименьший элемент п.т.  $U$ ;

$F_2) u_1, u_2 \in m \Rightarrow u_1 \cap u_2 \in m;$

$F_3) u \in m, u_1 \in U, u_1 > u \Rightarrow u_1 \in m.$

Определение 4. Псевдотопологическим пространством (п.т.п.) назовем пару  $\{M, U\}$ , состоящую из п.т.  $U$  и из некоторого непустого семейства  $M$  фильтров этой п.т.

Если семейство  $M$  фильтров п.т.  $U$  обладает тем свойством, что  $\forall u_1, u_2 \in U, u_1 \neq u_2 \exists m \in M$  такой, что только один из  $u_1, u_2$  принадлежит  $m$ , то будем говорить, что  $M$  различает  $U$ .

П.т.п.  $\{M, U\}$  назовем бикompактным, если для каждого подсемейства  $U' \subset U$ , обладающего тем свойством, что  $\forall m \in M \exists u' \in U'$  такое, что  $u' \in m$ , существует конечное подсемейство  $\bar{U}' \subset U'$  с таким же свойством.

Будем говорить, что п.т.п.  $\{M, U\}$  удовлетворяет  $T_1$ -аксиоме отделимости, если для любых двух различных элементов  $m_1, m_2$  из  $M \exists u_1 \in m_1$  и  $u_2 \in m_2$  такие, что  $u_1 \notin m_2$  и  $u_2 \notin m_1$ .

П.т.п.  $\{M, U\}$  назовем хаусдорфовым, если для любых двух различных элементов  $m_1, m_2$  из  $M \exists u_1 \in m_1$  и  $u_2 \in m_2$  такие, что  $u_1 \cap u_2 = \emptyset$ .

Пусть  $(Y, V)$  — произвольное топологическое пространство ( $V$  — топология на множестве  $Y$ ). Обозначим через  $\Phi_V$  семейство подмножеств множества  $V$ , состоящее из всех открытых фильтров \* пространства  $(Y, V)$  и из  $V$ . В множестве  $\Phi_V$  введем отношение частичного упорядочения  $>$  следующим образом:  $\varphi_1 > \varphi_2$ , если  $\varphi_1 \subset \varphi_2$ . Легко проверить, что  $\Phi_V$  с указанным отношением образует п.т., наименьшим элементом которой служит  $V$ , а псевдообъединение элементов из  $\Phi_V$  совпадает с пересечением этих же элементов как подмножеств из  $V$ .

Подмножество  $\Phi$  множества  $\Phi_V$  назовем полуподтопологией п.т.  $\Phi_V$ , если  $\Phi$  с тем же отношением  $>$  образует п.т. такую, что ее наименьший элемент  $\theta_\Phi$  совпадает с наименьшим элементом п.т.  $\Phi_V$  и псевдообъединение элементов в  $\Phi$  совпадает с псевдообъединением тех же элементов в  $\Phi_V$ .

Таким образом, полуподтопология п.т.  $\Phi_V$  — это любое семейство открытых фильтров пространства  $(Y, V)$ , замкнутое относительно операции пересечения, дополненное одним элементом — множеством  $V$ .

Обозначим через  $K(Y, V)$  семейство всех п.т.п.  $\{P, \Phi\}$ , где  $\Phi$  — полуподтопология п.т.  $\Phi_V$ , а  $P$  различает  $\Phi$ .

Пусть  $[h, (Z, W)]$  — некоторое расширение топологического пространства  $(Y, V)$ ,  $(X, U)$  — подпространство пространства  $(Z, W)$ , где  $X = Z \setminus h(Y)$ , а  $h$  — гомеоморфизм пространства  $(Y, V)$ , на плотное открытое подпространство пространства  $(Z, W)$ .

Каждому  $u \in U$  сопоставим подмножество  $\varphi_u = \{h^{-1}(w \cap Y^*), w \in W_u\}$  множества  $V$ , где  $Y^* = h(Y)$ , а  $W_u$  — семейство всех  $w$  из  $W$ , пересечение которых с  $X$  совпадает с  $u$ .

Пусть  $\Phi$  — семейство всех  $\varphi_u$ , когда  $u$  пробегает все  $U$ .

Предложение 1. Семейство  $\Phi$  является полуподтопологией п.т.  $\Phi_V$ .

Каждой точке  $x \in X$  сопоставим подмножество  $p_x = \{\varphi_u; u \in U_x\}$  множества  $\Phi$ , где  $U_x$  — система всех открытых окрестностей точки  $x$  в пространстве  $(X, U)$ .

Пусть  $P$  — множество всех  $p_x$ , когда  $x$  пробегает все  $X$ .

Предложение 2. Каждый элемент  $p$  множества  $P$  представляет собой фильтр п.т.  $\Phi$ , причем  $P$  различает  $\Phi$ .

Таким образом, в силу предложений 1 и 2, каждое расширение пространства  $(Y, V)$  порождает определенное п.т.п.  $\{P, \Phi\}$ , принадлежащее се-

\* Здесь под открытым фильтром пространства  $(Y, V)$  понимается семейство  $\varphi$  его открытых множеств такое, что 1)  $\emptyset \in \varphi$ ; 2)  $v_1, v_2 \in \varphi \Rightarrow v_1 \cap v_2 \in \varphi$ ; 3)  $v \in \varphi, v_1 \in V$  и  $v \subset v_1 \Rightarrow v_1 \in \varphi$ .

мейству  $K(Y, V)$ , при этом эквивалентные расширения порождают одно и то же п.т.п. имеем некоторое отображение

$$T: R(Y, V) \rightarrow K(Y, V),$$

где  $R(Y, V)$  — множество всех классов эквивалентных между собой расширений пространства  $(Y, V)$ .

Пусть  $I$  — отображение, которое каждому расширению сопоставляет тот элемент из  $R(Y, V)$ , который его содержит.

**Теорема 1.** *Существует отображение  $T^*$  множества  $K(Y, V)$  в множество всех расширений пространства  $(Y, V)$  такое, что композиция  $T \circ I \circ T^*$  является тождественным отображением множества  $K(Y, V)$ .*

*Следствие.  $T$  является сюръективным отображением.*

Простые примеры показывают, что образы различных элементов из  $R(Y, V)$  при отображении  $T$  могут совпадать, т. е.  $T$  не является инъективным отображением. Однако, если ограничиться регулярными расширениями регулярного пространства, то имеет место

**Теорема 2.** *Сужение  $T$  на множество всех классов эквивалентных между собой регулярных расширений регулярного пространства  $(Y, V)$  является инъективным отображением.*

*Следствие. На множестве всех классов эквивалентных между собой регулярных расширений пространства  $(Y, V)$   $I \circ T^* \circ T$  является тождественным отображением.*

Пусть  $\sigma_V$  — семейство всех открытых множеств пространства  $(Y, V)$ , дополнения которых бикомпактны.

**Теорема 3.** *Для любого бикомпактного расширения  $[h, (Z, W)]$  пространства  $(Y, V)$   $\{P, \Phi\} = T \circ I[h, (Z, W)]$  является бикомпактным п.т.п. таким, что наибольший элемент  $\hat{\Phi}$  п.т.  $\Phi$  содержится в  $\sigma_V$ .*

Обратно, если  $\{P, \Phi\} \in K(Y, V)$  — бикомпактное п.т.п. такое, что  $\Phi \subset \sigma_V$ , то  $T^*\{P, \Phi\}$  является бикомпактным расширением пространства  $(Y, V)$ .

**Предложение 3.** *Пусть  $(Y, V)$  —  $T_0$ -пространство, тогда  $V\{P, \Phi\} \in K(Y, V)$   $T^*\{P, \Phi\}$  является  $T_0$ -расширением пространства  $(Y, V)$ .*

**Предложение 4.** *Пусть  $(Y, V)$  —  $T_1$ -пространство и  $\{P, \Phi\} \in K(Y, V)$ . Для того чтобы  $T^*\{P, \Phi\}$  было  $T$ -расширением пространства  $(Y, V)$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\{P, \Phi\}$  было  $T_1$ -п.т.п. и выполнялось условие  $\bigcap \{v: v \in \Phi\} = \emptyset$ .*

Пусть  $\{P, \Phi\} \in K(Y, V)$ , тогда  $\forall p \in P$  — семейство открытых множеств  $p^* = \bigcup \{\varphi: \varphi \in p\}$  образует открытый фильтр пространства  $(Y, V)$ , т. е.  $p^*$  является фильтром п.т.  $(V, \supset)$ .

Таким образом, каждое п.т.п.  $\{P, \Phi\} \in K(Y, V)$  порождает п.т.п.  $\{P^*, V\}$ , где  $P^*$  — множество всех  $p^*$ , когда  $p$  пробегает все  $P$ .

**Предложение 5.** *Пусть  $[h, (Z, W)]$  — хаусдорфово расширение пространства  $(Y, V)$  и  $\{P, \Phi\} = T \circ I[h, (Z, W)]$ .*

*Тогда  $\sigma_V \subset \hat{\Phi}$ , из  $p_1, p_2 \in P, p_1 \neq p_2 \Rightarrow p_1^* \neq p_2^*, \{P^*, V\}$  является хаусдорфовым п.т.п., и  $\forall p^* \in P^* \bigcap \{\bar{v}: v \in p^*\} = \emptyset$ , т. е. базис фильтра  $p^*$  в пространстве  $(Y, V)$  не имеет точки прикосновения.*

Обратно, пусть  $(Y, V)$  — хаусдорфово пространство и  $\{P, \Phi\} \in K(Y, V)$  такое, что из  $p_1, p_2 \in P, p_1 \neq p_2 \Rightarrow p_1^* \neq p_2^*, \{P^*, V\}$  является хаусдорфовым п.т.п. и  $\forall p^* \in P^* \bigcap \{\bar{v}: v \in p^*\} = \emptyset$ , тогда  $T^*\{P, \Phi\}$  — хаусдорфово расширение пространства  $(Y, V)$ .

Пусть  $R^*(Y, V)$  — множество всех классов эквивалентных между собой хаусдорфовых бикомпактных расширений локально бикомпактного хаусдорфова пространства  $(Y, V)$ , а  $K^*(Y, V)$  — множество всех бикомпактных п.т.п.  $\{P, \Phi\}$  из  $K(Y, V)$  таких, что  $\hat{\Phi} = \sigma_V$ , из  $p_1, p_2 \in P, p_1 \neq p_2 \Rightarrow p_1^* \neq p_2^*$  и  $\{P^*, V\}$  — хаусдорфово п.т.п..

**Теорема 4.** *Отображение  $T$  является биекцией между множествами  $R^*(Y, V)$  и  $K^*(Y, V)$ .*

Применяя полученные результаты к одноточечным расширениям и отождествляя эквивалентные расширения, можно сформулировать следующие предложения.

Предложение 6. Для любого  $T_1$ -пространства  $(Y, V)$  существует биекция между множеством всех одноточечных  $T_1$ -расширений пространства  $(Y, V)$  и множеством всех открытых фильтров  $\Phi$  пространства  $(Y, V)$ , удовлетворяющих условию  $\bigcap \{v: v \in \Phi\} = \Phi$ .

Предложение 7. Существует биекция между множеством всех одноточечных бикомпактных расширений произвольного пространства  $(Y, V)$  и множеством всех открытых фильтров  $\Phi$  этого пространства, содержащихся в  $\sigma_V$ .

Предложение 8. Существует биекция между множеством всех одноточечных хаусдорфовых расширений хаусдорфова пространства  $(Y, V)$  и множеством всех открытых фильтров  $\Phi \supset \sigma_V$  этого пространства, удовлетворяющих условию  $\bigcap \{\bar{v}: v \in \Phi\} = \Phi$ .

Учитывая, что для локально бикомпактного и не бикомпактного хаусдорфова пространства  $(Y, V)$  существует только один открытый фильтр  $\Phi = \sigma_V$ , удовлетворяющий условиям предложений 7 и 8, из этих предложений получаем известную теорему П. С. Александрова о том, что локально бикомпактное, но не бикомпактное, хаусдорфово пространство допускает только одно (с точностью до эквивалентности) одноточечное хаусдорфово бикомпактное расширение.

Выражаю глубокую благодарность акад. П. С. Александрову за обсуждение и ценные замечания.

Институт математики  
Академии наук АрмССР  
Ереван

Поступило  
22 II 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> A. Tychonoff, Math. Ann., **102**, 544 (1929). <sup>2</sup> E. Čech, Ann. Math., **38**, 823 (1937). <sup>3</sup> M. H. Stone, Trans. Am. Math. Soc., **41**, 375 (1937). <sup>4</sup> П. С. Александров, Матем. сборн., **5** (47), 403 (1939). <sup>5</sup> S. Fomin, Ann. Math., **44**, 471 (1943). <sup>6</sup> Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., **31**, 543 (1952). <sup>7</sup> П. Александров, В. Пономарев, ДАН, **121**, № 4, 575 (1958). <sup>8</sup> С. Илиадис, С. Фомин, УМН, **21**, № 4, 47 (1966). <sup>9</sup> В. Зайцев, ДАН, **182**, № 1, 27 (1968). <sup>10</sup> В. Зайцев, ДАН, **185**, № 1, 20 (1969). <sup>11</sup> С. Г. Овсепян, Докл. АН АрмССР, **54**, № 3 (1972).