УДК 539.12.01 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_67
EDN: HZYUGC

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ЛОГУНОВА – ТАВХЕЛИДЗЕ С ПОТЕНЦИАЛОМ «ДЕЛЬТА-ОКРУЖНОСТЬ» ДЛЯ СОСТОЯНИЙ РАССЕЯНИЯ

А.В. Павленко, В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

EXACT SOLUTIONS OF THE TWO-DIMENSIONAL LOGUNOV – TAVKHELIDZE EQUATION WITH THE “DELTA-CIRCLE” POTENTIAL FOR SCATTERING STATES

A.V. Paulenka, V.N. Kapshai, Yu.A. Grishechkin

Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Получены точные решения двумерных парциальных интегральных уравнений Логунова – Тавхелидзе для состояний рассеяния системы двух скалярных частиц одинаковой массы. Взаимодействие частиц моделировано квазипотенциалом «дельта-окружность», заданным в релятивистском конфигурационном представлении и суперпозицией двух таких квазипотенциалов. В результате анализа парциальных сечений рассеяния и полной двумерной амплитуды рассеяния выявлено резонансное поведение этих величин. Установлено, что особенностью двумерного рассеяния, в отличие от его трехмерного варианта, является неограниченный рост сечения рассеяния, соответствующего состояниям с равным нулю азимутальным квантовым числом при стремлении быстроты к нулю (энергии к массе покоя). Эта особенность обусловлена логарифмическим поведением парциальной функции Грина при малых значениях быстроты. На примере найденных точных решений продемонстрировано выполнение условия унитарности двумерных парциальных амплитуд рассеяния.

Ключевые слова: *двумерное уравнение Логунова – Тавхелидзе*, *двумерная функция Грина*, *волновая функция*, *двухчастичная система*, *потенциал «дельта-окружность»*, *парциальное интегральное уравнение*, *точное решение*, *условие унитарности*, *двумерная амплитуда рассеяния*, *двумерное сечение рассеяния.*

Для цитирования: *Павленко*, *А.В.* Точные решения двумерного уравнения Логунова – Тавхелидзе с потенциалом «дельта-окружность» для состояний рассеяния / А.В. Павленко, В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 67–72. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_67. – EDN: HZYUGC

Abstract. The exact solutions of the two-dimensional partial integral equations of Logunov-Tavkhelidze for the scattering states of a system of two scalar particles of equal mass were obtained. The particle interaction was modeled by a “delta-circle” quasipotential defined in the relativistic configurational representation and by a superposition of two such quasipotentials. The analysis of the partial scattering cross-sections and the full two-dimensional scattering amplitude revealed their resonant behavior. It was established that a peculiarity of two-dimensional scattering, unlike its three-dimensional counterpart, is the unlimited growth of the scattering cross-section corresponding to states with a zero azimuthal quantum number as the rapidity tends to zero (energy tends to the rest mass). This feature is caused by the logarithmic behavior of the partial Green’s function at small rapidity values. Using the found exact solutions as an example, the fulfillment of the unitarity condition for the two-dimensional partial scattering amplitudes is demonstrated.

Keywords: *two-dimensional Logunov-Tavkhelidze equation*, *two-dimensional Green’s function*, *wave function*, *two-particle system*, “*delta-circle*” *potential*, *partial integral equation*, *exact solution*, *unitarity condition*, *two-dimensional scattering amplitude*, *two-dimensional scattering cross-section.*

For citation: *Paulenka*, *A.V.* Exact solutions of the two-dimensional Logunov – Tavkhelidze equation with the “delta-circle” potential for scattering states / A.V. Paulenka, V.N. Kapshai, Yu.A. Grishechkin // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 67–72. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_67 (in Russian). – EDN: HZYUGC

Введение

Моделирование короткодействующих взаимодействий посредством потенциалов, содержащих дельта-функции, широко применяется в задачах квантовой механики и квантовой теории поля, так как при этом возможно получение точных решений уравнений, описывающих состояния систем частиц. Например, точные решения уравнения Шрёдингера рассматривались в работах [1], [2], а решения уравнения Дирака – в работах [3]–[7]. Однако, решения интегральных квазипотенциальных уравнений относительно состояний рассеяния исследовались только в одномерном [8], [9] и трехмерном [10]–[12] случаях. В настоящей работе в релятивистском конфигурационном представлении (РКП) применительно к состояниям рассеяния рассматривается двумерная задача для квазипотенциала «дельта-окружность» и суперпозиции двух таких квазипотенциалов.

1 Парциальные интегральные уравнения

Двумерные интегральные уравнения квазипотенциального типа, сформулированные в РКП для описания состояний упругого рассеяния системы двух скалярных частиц одинаковой массы m, имеют вид $(\hbar = c = 1)$:

$$\psi(\mathbf{q},\boldsymbol{\rho}) = \xi(\mathbf{q},\boldsymbol{\rho}) + \int G(E_q;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')V(\rho')\psi(\mathbf{q},\boldsymbol{\rho}')d\boldsymbol{\rho}', \quad (1.1)$$

где $\psi(\mathbf{q},\boldsymbol{\rho})$ – двумерная волновая функция; $\mathbf{q}$ – относительный начальный импульс двухчастичной системы; $\boldsymbol{\rho} = \rho\mathbf{n}_{\boldsymbol{\rho}}$ – двумерный радиус-вектор в РКП; ρ – модуль радиус-вектора; $V(\rho')$ – локальный в РКП квазипотенциал; $G(E_q;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}')$ – функция Грина; $2E_q = 2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}$ – энергия двухчастичной системы; $\xi(\mathbf{q},\boldsymbol{\rho})$ – релятивистская плоская волна, которая в двумерном пространстве имеет вид

$$\xi(\mathbf{q},\boldsymbol{\rho}) = \left(\frac{E_q - \mathbf{q}\mathbf{n}_{\boldsymbol{\rho}}}{m}\right)^{-\frac{1}{2}-im\rho}. \quad (1.2)$$

Разложение релятивистской плоской волны (1.2), функции Грина и волновой функции на парциальные составляющие соответственно представим в следующей форме:

$$\xi(\mathbf{q},\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} i^{\mu} s_{\mu}(\chi_q,\rho)\exp(i\mu\alpha);$$

$$\psi(\mathbf{q},\boldsymbol{\rho}) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \frac{i^{\mu}}{\sqrt{m\rho\,\mathrm{sh}\,\chi_q}}\psi_{\mu}(\chi_q,\rho)\exp(i\mu\alpha); \quad (1.3)$$

$$G(E_q;\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}') = \frac{1}{\sqrt{\rho\rho'}}\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} G_{\mu}(\chi_q;\rho,\rho')\exp(i\mu\gamma),$$

где в целях упрощения последующих вычислений введена быстрота χ_q, связанная с энергией системы выражением $2E_q = 2m\,\mathrm{ch}\,\chi_q$; $\psi_{\mu}(\chi_q,\rho)$ – парциальные волновые функции в РКП; μ – азимутальное квантовое число; α – угол между векторами $\mathbf{q}$ и $\boldsymbol{\rho}$; $G_{\mu}(\chi_q;\rho,\rho')$ – парциальные функции Грина в РКП; γ – угол между векторами $\boldsymbol{\rho}$ и $\boldsymbol{\rho}'$; $s_{\mu}(\chi_q,\rho)$ – парциальные волны, представимые выражениями [13]

$$s_{\mu}(\chi_q,\rho) = i^{\mu}\frac{\Gamma(1/2 - im\rho)}{\Gamma(1/2+\mu-im\rho)}P^{\mu}_{-im\rho-1/2}(\mathrm{ch}\chi_q), \quad (1.4)$$

здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера; $P_a^b(z)$ – функция Лежандра первого рода.

Подставляя (1.3) в (1.1), получим двумерные интегральные уравнения для парциальных волновых функций:

$$\psi_{\mu}(\chi_q,\rho) = \sqrt{m\rho\,\mathrm{sh}\,\chi_q}\,s_{\mu}(\chi_q,\rho) + \quad (1.5)$$
$$+2\pi\int_0^{\infty} G_{\mu}(\chi_q;\rho,\rho')V(\rho')\psi_{\mu}(\chi_q,\rho')d\rho'.$$

Парциальные функции Грина двумерного уравнения Логунова – Тавхелидзе имеют вид:

$$G_{\mu}(\chi_q;\rho,\rho') = \frac{-i\sqrt{\rho\rho'}\mathrm{sh}(\chi_q)}{4\mathrm{sh}(2\chi_q)}\times$$
$$\times\left[\frac{e^{+}_{\mu}(\chi_q,\rho)e^{+*}_{\mu}(\chi_q,\rho')}{1-\exp\left[-\pi m(\rho-\rho')\right]} + \right.$$
$$+\frac{e^{-}_{\mu}(\chi_q,\rho)e^{-*}_{\mu}(\chi_q,\rho')}{1-\exp\left[\pi m(\rho-\rho')\right]} - \frac{e^{+}_{\mu}(\chi_q,\rho)e^{-*}_{\mu}(\chi_q,\rho')}{1-\exp\left[-\pi m(\rho+\rho')\right]} -$$
$$\left.-\frac{e^{-}_{\mu}(\chi_q,\rho)e^{+*}_{\mu}(\chi_q,\rho')}{1-\exp\left[\pi m(\rho+\rho')\right]}\right]. \quad (1.6)$$

В (1.6) введены обозначения

$$e_{\mu}^{\pm}(\chi_q,\rho) = i^{\mu}\frac{2}{\pi}\mathrm{cth}(\pi m\rho)\frac{\Gamma(1/2 - im\rho)}{\Gamma(1/2+\mu-im\rho)}\times$$
$$\times Q^{\mu}_{-1/2\mp im\rho}(\mathrm{ch}\chi_q), \quad (1.7)$$

где $Q_a^b(z)$ – функция Лежандра второго рода.

Отметим, что сумма первых двух слагаемых, заключённых в квадратные скобки в выражении (1.6), при $\rho = \rho'$ имеет неопределенность вида $0/0$. Раскрывая ее по правилу Лопиталя, получим:

$$G_{\mu}(\chi_q;\rho',\rho') =$$
$$= \frac{-i\rho'\,\mathrm{sh}(\chi_q)}{4\,\mathrm{sh}(2\chi_q)}\left[e^{-}_{\mu}(\chi_q,\rho')e^{-*}_{\mu}(\chi_q,\rho') + \right.$$
$$+\frac{e^{+*}_{\mu}(\chi_q,\rho')}{\pi m}\frac{\partial e^{+}_{\mu}(\chi_q,\rho')}{\partial\rho'} -$$
$$-\frac{e^{-*}_{\mu}(\chi_q,\rho')}{\pi m}\frac{\partial e^{-}_{\mu}(\chi_q,\rho')}{\partial\rho'} - \frac{e^{+}_{\mu}(\chi_q,\rho')e^{-*}_{\mu}(\chi_q,\rho')}{1-\exp\left[-2\pi m\rho'\right]} -$$
$$\left.-\frac{e^{-}_{\mu}(\chi_q,\rho')e^{+*}_{\mu}(\chi_q,\rho')}{1-\exp\left[2\pi m\rho'\right]}\right]. \quad (1.8)$$

Асимптотическое поведение при $\rho\to\infty$ функций (1.4), (1.7) и парциальных функций Грина (1.6) описывается формулами

$$s_{\mu}(\chi_q,\rho)\Big|_{\rho\to\infty} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\rho m\,\mathrm{sh}\,\chi_q}}\cos\left(\rho m\chi_q - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (1.9)$$

$$e_{\mu}^{\pm}(\chi_q,\rho)\Big|_{\rho\to\infty} \approx$$
$$\approx \pm i\sqrt{\frac{2}{\pi\rho m\,\mathrm{sh}\,\chi_q}}\exp\left[\pm i\left(\rho m\chi_q - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad (1.10)$$

$$G_{\mu}(\chi_q;\rho,\rho')\Big|_{\rho\to\infty} \cong \frac{-i}{\mathrm{sh}(2\chi_q)}s^{*}_{\mu}(\chi_q,\rho')\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\rho'\,\mathrm{sh}\,\chi_q}{2\pi m}}\exp\left[i\left(\rho m\chi_q - \mu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (1.11)$$

2 Определение двумерной амплитуды рассеяния

С учетом (1.9)–(1.11) получим из уравнения (1.5) асимптотическое поведение парциальных волновых функций:

$$\psi_\mu(\chi_q,\rho)\Big|_{\rho\to\infty} \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(\rho m\chi_q - \mu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+$$
$$+i\sqrt{m\,\mathrm{sh}\,\chi_q}\,f_\mu(\chi_q)\exp\left[i\left(\rho m\chi_q-\mu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (2.1)$$

Здесь $f_\mu(\chi_q)$ – двумерные парциальные амплитуды рассеяния:

$$f_\mu(\chi_q)=\frac{-\sqrt{2\pi}}{m\,\mathrm{sh}(2\chi_q)}\times$$
$$\times\int_0^\infty \sqrt{\rho'}\,V(\rho')s_\mu^*(\chi_q,\rho')\psi_\mu(\chi_q,\rho')d\rho'. \quad (2.2)$$

После нахождения парциальных амплитуд двумерные парциальные сечения $\sigma_\mu(\chi_q)$ и двумерное полное сечение рассеяния $\sigma(\chi_q)$ определяются по формулам

$$\sigma_\mu(\chi_q)=2\pi\left|f_\mu(\chi_q)\right|^2;$$
$$\sigma(\chi_q)=\sigma_0(\chi_q)+2\sum_{\mu=1}^{\infty}\sigma_\mu(\chi_q). \quad (2.3)$$

Для вывода условия унитарности парциальных амплитуд рассеяния сгруппируем слагаемые, соответствующие расходящейся и сходящейся волнам, и получим

$$\psi_\mu(\chi_q,\rho)\Big|_{\rho\to\infty}\cong\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-i\left(\rho m\chi_q-\mu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+$$
$$+\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}+i\sqrt{m\,\mathrm{sh}\,\chi_q}\,f_\mu(\chi_q)\right]\times$$
$$\times\exp\left[i\left(\rho m\chi_q-\mu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (2.4)$$

Теперь из (2.4) определим отношение коэффициента, стоящего перед экспонентой в слагаемом, содержащем расходящуюся волну, к коэффициенту, записанному на такой же позиции в слагаемом, содержащем сходящуюся волну, и обозначим эту величину как $S_\mu(\chi_q)$. Данное отношение, вычисляемое с использованием асимптотических решений, принимает вид:

$$S_\mu(\chi_q)=\frac{(2\pi)^{-1/2}+i\sqrt{m\,\mathrm{sh}\,\chi_q}\,f_\mu(\chi_q)}{(2\pi)^{-1/2}}=$$
$$=1+i\sqrt{2\pi m\,\mathrm{sh}\,\chi_q}\,f_\mu(\chi_q). \quad (2.5)$$

Если функция (2.5) удовлетворяет условию

$$S_\mu(\chi_q)S_\mu^*(\chi_q)=1, \quad (2.6)$$

то функции (2.5) могут быть представлены в следующей форме

$$S_\mu(\chi_q)=\exp(2i\varphi(\chi_q)), \quad (2.7)$$

где $\varphi(\chi_q)$ – фазовый сдвиг. Пользуясь (2.5)–(2.7), нетрудно получить выражение

$$\mathrm{Im}\,f_\mu(\chi_q)=\sqrt{\frac{\pi m\,\mathrm{sh}\,\chi_q}{2}}\left|f_\mu(\chi_q)\right|^2, \quad (2.8)$$

которое является условием унитарности для парциальных амплитуд рассеяния и аналогично нерелятивистскому [14].

3 Решения интегральных парциальных уравнений для квазипотенциала «дельта-окружность»

Рассмотрим квазипотенциал вида:

$$V(\rho)=\lambda_1\delta(\rho-a_1), \quad (3.1)$$

где $\delta(\rho-a_1)$ – дельта-функция; a_1 – радиус «дельта-окружности»; λ_1 – константа. Подставляя (3.1) в (2.2) и вычисляя интегралы с учетом свойств дельта-функции, получим парциальные амплитуды рассеяния

$$f_\mu(\chi_q)=-\lambda_1\frac{\sqrt{2\pi a_1}}{m\,\mathrm{sh}(2\chi_q)}s_\mu^*(\chi_q,a_1)\psi_\mu(\chi_q,a_1), \quad (3.2)$$

где $\psi_\mu(\chi_q,a_1)$ – неизвестный коэффициент. Для его определения подставим (3.1) в (1.5) и после вычисления интегралов получим

$$\psi_\mu(\chi_q,\rho)=\sqrt{m\rho\,\mathrm{sh}\,\chi_q}\,s_\mu(\chi_q,\rho)+$$
$$+2\pi\lambda_1G_\mu(\chi_q;\rho,a_1)\psi_\mu(\chi_q,a_1). \quad (3.3)$$

Из (3.3) нетрудно получить формулу для вычисления искомого коэффициента:

$$\psi_\mu(\chi_q,a_1)=\frac{s_\mu(\chi_q,a_1)\sqrt{ma_1\,\mathrm{sh}\,\chi_q}}{1-2\pi\lambda_1G_\mu(\chi_q;a_1,a_1)}. \quad (3.4)$$

После подстановки (3.4) в (3.2) получим окончательное выражение для парциальных амплитуд рассеяния:

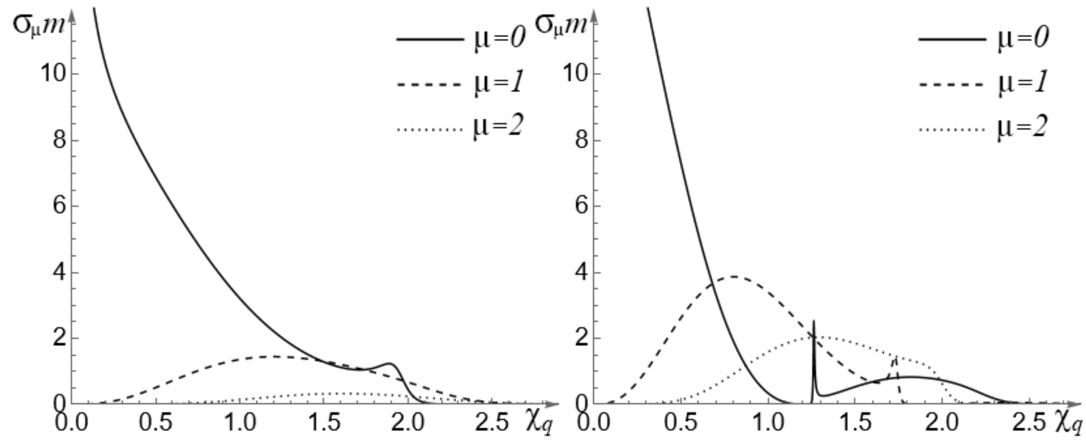
$$f_\mu(\chi_q)=\frac{\sqrt{2\pi}\,\lambda_1a_1}{\sqrt{m}\,\mathrm{sh}(2\chi_q)}\frac{\sqrt{\mathrm{sh}\,\chi_q}\,s_\mu(\chi_q,a_1)s_\mu^*(\chi_q,a_1)}{2\pi\lambda_1G_\mu(\chi_q;a_1,a_1)-1}. \quad (3.5)$$

Нетрудно убедиться, что эти амплитуды удовлетворяют условию унитарности (2.8). Используя (3.5), получим парциальные сечения рассеяния

$$\sigma_\mu(\chi_q)=\frac{4\pi^2\lambda_1^2a_1^2}{m\,\mathrm{sh}^2(2\chi_q)}\frac{\mathrm{sh}\,\chi_q\left|s_\mu(\chi_q,a_1)\right|^4}{\left|2\pi\lambda_1G_\mu(\chi_q;a_1,a_1)-1\right|^2}. \quad (3.6)$$

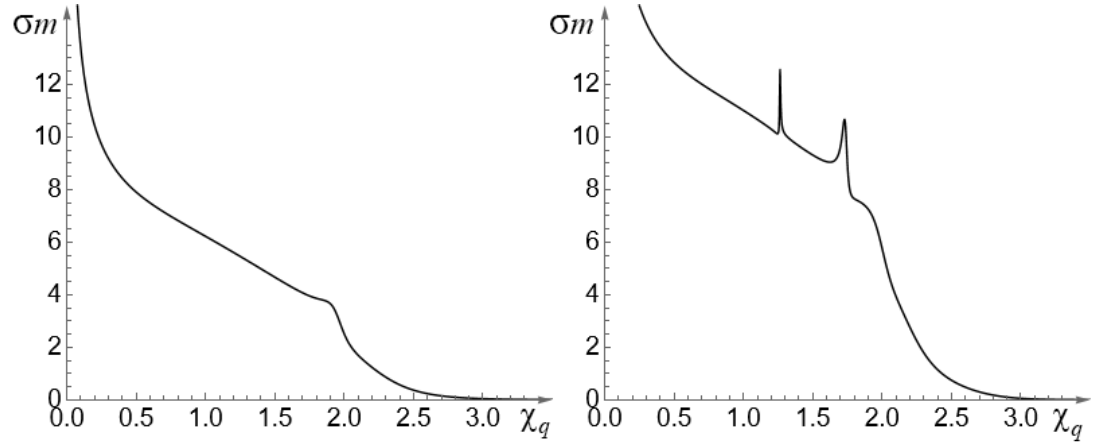
На рисунке 3.1 проиллюстрированы зависимости парциальных сечений рассеяния (3.6) от быстроты χ_q для первых трех значений азимутального квантового числа μ.

Численный расчет показывает, что парциальное сечение рассматриваемой системы частиц, находящейся в состоянии с равным нулю азимутальным квантовым числом, при малых значениях быстроты (при энергии близкой к массе покоя) неограниченно возрастает. Это связано с тем, что соответствующая функция Грина в этой области имеет логарифмическую особенность.



а) $a_1 m = 1$ *б*) $a_1 m = 2$

Рисунок 3.1 – Зависимость парциальных сечений от быстроты при $\lambda_1/m = 10$



а) $a_1 m = 1$ *б*) $a_1 m = 2$

Рисунок 3.2 – Зависимость полного сечения от быстроты при $\lambda_1/m = 10$

На рисунке видно, что при $\mu = 0$ и $a_1 m = 1$ в зависимости $\sigma_0(\chi_q)$ при некотором значении быстроты наблюдается резкое увеличение этого парциального сечения рассеяния. Для системы частиц, находящейся в состояниях с $\mu = 1$ и $\mu = 2$, подобное поведение не наблюдается (рисунок 3.1, *а*), однако, с увеличением радиуса «дельта-окружности», как видно на рисунке 3.1, *б*, резкое увеличение зависимостей σ_μ от χ_q наблюдается и в этих состояниях.

На рисунке 3.2 приведена зависимость полного сечения рассеяния от быстроты, рассчитанная по формуле (2.3). При этом ряд был усечен до суммы первых двенадцати членов, так как последующие слагаемые вносят пренебрежимо малый вклад, что проверено дополнительными вычислениями.

Сравнивая рисунки 3.1 и 3.2, видим, что основной вклад в полное сечение рассеяния при малых значениях быстроты вносит парциальная составляющая, соответствующая состоянию с $\mu = 0$. Это обусловлено неограниченным ростом данного парциального сечения в низкоэнергетической области. На рисунке 3.2 наблюдаются резкие изменения полного сечения при тех же значениях быстроты, что и парциальных сечений (рисунок 3.1).

4 Решение интегральных парциальных уравнений для суперпозиции двух квазипотенциалов «дельта-окружность»

Рассмотрим теперь решение уравнений (1.5) при выборе взаимодействия вида

$$V(\rho) = \lambda_1 \delta(\rho - a_1) + \lambda_2 \delta(\rho - a_2), \qquad (4.1)$$

где λ_1 и λ_2 – действительные константы; a_1 и a_2 – радиусы «дельта-окружностей» $(a_1 \le a_2)$. Подставляя квазипотенциал (4.1) в интегральные уравнения (1.5) получим

$$\psi_\mu(\chi_q, \rho) = \sqrt{m\rho \operatorname{sh}\chi_q}\, s_\mu(\chi_q, \rho) + \\ + 2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q; \rho, a_1)\psi_\mu(\chi_q, a_1) + \\ + 2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q; \rho, a_2)\psi_\mu(\chi_q, a_2). \qquad (4.2)$$

Для нахождения неизвестных констант $\psi_\mu(\chi_q, a_1)$ и $\psi_\mu(\chi_q, a_2)$ положим в (4.2) $\rho = a_1$ и $\rho = a_2$ и, тем самым, сведем это уравнение к системе двух линейных алгебраических уравнений относительно этих констант:

$$\begin{bmatrix} 1-2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q;a_1,a_1) & -2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q;a_1,a_2) \\ -2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q;a_2,a_1) & 1-2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q;a_2,a_2) \end{bmatrix} \times \tag{4.3}$$

$$\times \begin{bmatrix} \psi_\mu(\chi_q, a_1) \\ \psi_\mu(\chi_q, a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{m a_1 \operatorname{sh}\chi_q}\, s_\mu(\chi_q, a_1) \\ \sqrt{m a_2 \operatorname{sh}\chi_q}\, s_\mu(\chi_q, a_2) \end{bmatrix}.$$

Решение системы (4.3) имеет вид

$$\psi_\mu(\chi_q, a_1) = \frac{\Delta_1(\chi_q)}{\Delta(\chi_q)}, \quad \psi_\mu(\chi_q, a_2) = \frac{\Delta_2(\chi_q)}{\Delta(\chi_q)}, \tag{4.4}$$

где

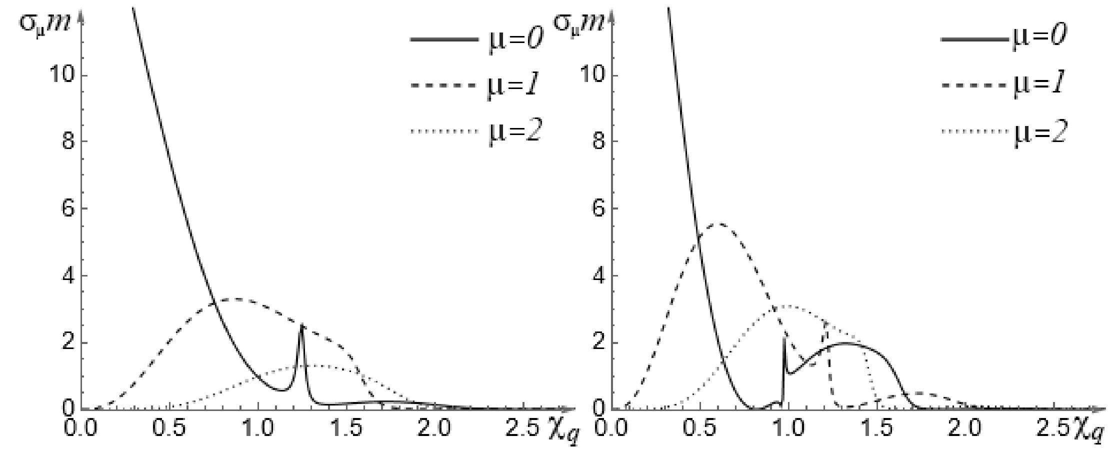
$$\Delta(\chi_q) =$$
$$= \left(1-2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q;a_1,a_1)\right)\left(1-2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q;a_2,a_2)\right) -$$
$$-(2\pi)^2 \lambda_2\lambda_1 G_\mu(\chi_q;a_1,a_2) G_\mu(\chi_q;a_2,a_1),$$
$$\Delta_1(\chi_q) =$$
$$= \sqrt{m a_1 \operatorname{sh}\chi_q}\, s_\mu(\chi_q, a_1)\left(1-2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q;a_2,a_2)\right) +$$
$$+\sqrt{m a_2 \operatorname{sh}\chi_q}\, s_\mu(\chi_q, a_2) 2\pi\lambda_2 G_\mu(\chi_q;a_1,a_2),$$
$$\Delta_2(\chi_q) =$$
$$= \left(1-2\pi\lambda_1 G_\mu(\chi_q;a_1,a_1)\right)\sqrt{m a_2 \operatorname{sh}\chi_q}\, s_\mu(\chi_q, a_2) +$$
$$+2\pi\lambda_1 \sqrt{m a_1 \operatorname{sh}\chi_q}\, s_\mu(\chi_q, a_1) G_\mu(\chi_q;a_2,a_1).$$

Двумерным парциальным амплитудам рассеяния (2.2) двухчастичной системы в случае взаимодействия, описываемого квазипотенциалом (4.1), соответствуют выражения

$$f_\mu(\chi_q) = \frac{\sqrt{2\pi}}{m\operatorname{sh}(2\chi_q)}\Big[-\lambda_1\sqrt{a_1}\, s^*_\mu(\chi_q, a_1)\psi_\mu(\chi_q, a_1) -$$
$$-\lambda_2\sqrt{a_2}\, s^*_\mu(\chi_q, a_2)\psi_\mu(\chi_q, a_2)\Big]. \tag{4.5}$$

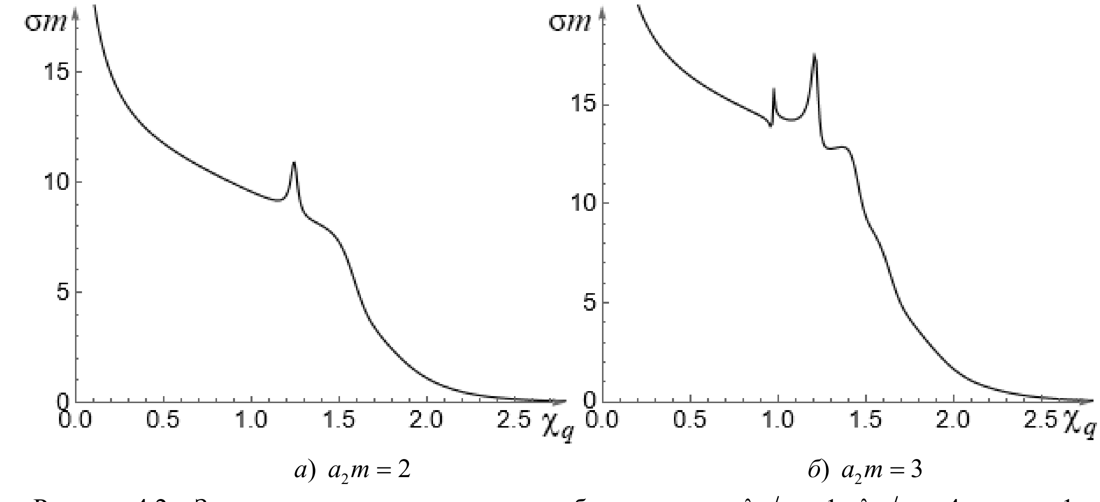
Амплитуды (4.5), как нетрудно убедиться, удовлетворяют условию унитарности (2.8). Используя (4.4) и (4.5) получим выражения для парциальных сечений рассеяния

$$\sigma_\mu(\chi_q) = \frac{4\pi^2}{m^2 \operatorname{sh}^2(2\chi_q)\left|\Delta(\chi_q)\right|^2} \times \tag{4.6}$$
$$\times\left|\lambda_1\sqrt{a_1}\, s^*_\mu(\chi_q, a_1)\Delta_1(\chi_q) + \lambda_2\sqrt{a_2}\, s^*_\mu(\chi_q, a_2)\Delta_2(\chi_q)\right|^2.$$



а) $a_2 m = 2$ *б)* $a_2 m = 3$

Рисунок 4.1 – Зависимость парциальных сечений от быстроты при $\lambda_1/m = 1$, $\lambda_2/m = 4$ и $a_1 m = 1$



а) $a_2 m = 2$ *б)* $a_2 m = 3$

Рисунок 4.2 – Зависимость полного сечения от быстроты при $\lambda_1/m = 1$, $\lambda_2/m = 4$ и $a_1 m = 1$

На рисунке 4.1 проиллюстрированы зависимости парциальных сечений рассеяния для первых трёх значений азимутального квантового числа от быстроты, а на рисунке 4.2 представлена зависимость полного двумерного сечения рассеяния от быстроты, вычисленного как сумма первых двадцати парциальных сечений (4.6). Выбор верхнего предела суммирования $(\mu_{\max} = 19)$ обусловлен сходимостью ряда – учет следующих членов вплоть до $\mu_{\max} = 30$ не вносит значимого изменения в результат.

Анализируя графики, изображенные на рисунках 4.1 и 4.2, видим, что для парциальных и для полных двумерных сечений рассеяния характерно резкое изменения поведения. Как и в случае взаимодействия, описываемого квазипотенциалом «дельта-окружность», при увеличении радиуса a_2 внешней «дельта-окружности» количество таких резких изменений возрастает.

Заключение

В настоящей работе получены точные аналитические выражения для парциальных двумерных амплитуд рассеяния и двумерных парциальных сечений рассеяния системы двух скалярных частиц одинаковой массы при выборе взаимодействия в виде квазипотенциала «дельта-окружность» и суперпозиции двух таких квазипотенциалов. Сформулировано условие унитарности парциальных амплитуд рассеяния в двумерном случае. В зависимости двумерных парциальных и полного сечения рассеяния от быстроты выявлены их резкие изменения, проявляющиеся характерными пиками на соответствующих графиках. Установлено, что при моделировании взаимодействия суперпозицией двух потенциалов «дельта-окружность» с увеличением радиуса внешней «дельта-окружности» количество пиков в полном сечении рассеяния возрастает вследствие проявления их для состояний со всё большим азимутальным квантовым числом, что согласуется с поведением системы с одиночным квазипотенциалом «дельта-окружность».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blinder*, *S.M.* Schrödinger equation for a Dirac bubble potential / S.M. Blinder // Chem. Phys. Lett. – 1979. – Vol. 64, № 3. – P. 485–486.

2. *Lassaut*, *M.* The rotational spectrum and the attractive delta-shell potential / M. Lassaut, R.J. Lombard, R. Yekken // Phys. Scr. – 2008. – Vol. 78, № 3. – P. 035008–1–5.

3. *Roy*, *C.L.* Some typical features of relativistic tunnelling through a double barrier system with delta-function potentials / C.L. Roy // Physica Status Solidi (B). – 1993. – Vol. 176, № 1. – P. 109–115.

4. *Roy*, *C.L.* Some special features of relativistic tunnelling through multi-barrier systems with delta-function barriers / C.L. Roy // Phys. Lett. A. – 1994. – Vol. 189, № 1. – P. 345–350.

5. *Dittrich*, *J.* Dirac operators with a spherically symmetric δ-shell interaction / J. Dittrich, P. Exner, P. Šeba // J. Math. Phys. – 1989. – Vol. 30, № 12. – P. 2875–2882.

6. *Domingyes-Adame*, *F.* Exact solutions of the Dirac equation with surface delta interactions / F. Domingyes-Adame // Am. J. Phys. A. – 1990. – Vol. 23, № 11. – P. 1993–1999.

7. *Shabani*, *J.* Exactly solvable models of relativistic δ-sphere interactions in quantum mechanics / J. Shabani // J. Math. Phys. – 2002. – Vol. 43, № 12. – P. 6064–6084.

8. *Kapshai*, *V.N.* Relativistic two-particle one-dimensional scattering problem for superposition of δ-potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // J. Phys. A. – 1999. – Vol. 32. – P. 5329–5342.

9. *Kapshai*, *V.N.* One-dimensional relativistic problems on bound states and scattering for a superposition of two δ potentials / V.N. Kapshai, T.A. Alferova // Russian Physics Journal. – 2002. – Vol. 45, № 1. – P. 1–9.

10. *Kapshai*, *V.N.* Relativistic two-particle equations with superposition of delta-shell potentials: scattering and bound states / V.N. Kapshai, Y.A. Grishechkin // arXiv preprint arXiv: 1312.1902. – 2013.

11. *Гришечкин*, *Ю.А.* Релятивистская задача о *s*-состояниях рассеяния для суперпозиции двух потенциалов «δ-сфера» / Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 7–12.

12. *Капшай*, *В.Н.* Решение релятивистских парциальных уравнений для *d*-состояний рассеяния / В.Н. Капшай, А.А. Гришечкина // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 1 (54). – С. 25–30.

13. *Мир-Касимов*, *Р.М.* Релятивистские операторы кинематического импульса / Р.М. Мир-Касимов // Письма в ЭЧАЯ. – 2010. – Т. 7, № 5 (161). – С. 505–515.

14. *Friedrich*, *H.* Scattering theory / H. Friedrich // Lecture Notes in Physics. – Berlin: Springer, 2013. – Vol. 872. – 287 p.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (*грант по проекту* Ф25М–004).

Поступила в редакцию 12.06.2025.

Информация об авторах

Павленко Андрей Васильевич – аспирант
Капшай Валерий Николаевич – к.ф.-м.н., доцент
Гришечкин Юрий Алексеевич – к.ф.-м.н., доцент