Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 4

УДК 517.948:513.88:518

МАТЕМАТИКА

И. Н. ОКИНШЕВИЧ

О СХОДИМОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 19 V 1972)

M-эллипсом $E[a, b; r]$ в метрическом пространстве X ([1]) будем называть множество точек $x \in X$, удовлетворяющих $\rho(a, x) + \rho(x, b) \leqslant r$. В частности, $E[a, b; \rho(a, b)] = [a, b]$, $E[a, a; r] = H[a, r/2]$ (замкнутый шар с центром в a и радиусом $r/2$). Исследуется решение уравнений

$$Px = 0, \tag{1}$$

где P — нелинейный непрерывный оператор из банахова пространства X в нормированное Y, следующими обобщениями методов Ньютона — Канторовича:

$$x_{n+1} = x_n - (V'z_n)^{-1}Px_n, \tag{2}$$

где z_n — любая точка некоторого не пустого M-эллипса $E[x_0, x_n; \cdot]$;

$$x_{n+1} \in E[x_n, x_n - (V'z_n)^{-1}Px_n; \cdot], \tag{3}$$

где $z_n \in E[z_{n-1}, x_n; \cdot]$, $z_0 = x_0$. $V \in [X \to Y]$ — вспомогательный оператор, в общем случае не совпадающий с P. Предполагается, что существует непрерывная сильная производная для оператора V в некотором выпуклом множестве $\Omega \subset X$ и линейный оператор $(V'x_0)^{-1}$, а операторы $(V'x_0)^{-1}V'x$ и $(V'x_0)^{-1}Rx$, $Rx \equiv Vx - Px$, $x \in \Omega$, удовлетворяют условию Липшица с постоянными k и δ соответственно.

В частности, при $V = P$, $\delta = 0$, устанавливается сходимость к решению x^* уравнения (1) процессов

$$x_{n+1} = x_n - (P'z_n)^{-1}Px_n, \quad z_n \in E[x_0, x_n; \cdot]; \tag{4}$$

$$x_{n+1} \in E[x_n, x_n - (P'z_n)^{-1}Px_n; \cdot], \quad z^n \in E[z_{n-1}, x_n; \cdot], \quad z_0 = x_0. \tag{5}$$

При аналогичных условиях в работах ([1-9]) и др. исследованы частные случаи процессов (2), (4) при $z_n = x_n$, $z_n = x_0$ и $z_n \in [x_0, x_1, \ldots, x_n]$. При $\delta = 0$ и несколько иных предположениях в ([1, 10]) установлено существование замкнутого множества точек z сходимости (4) к x^*. В других работах показана сходимость основного и модифицированного метода Ньютона — Канторовича с любой точки $H[x_0, (1 - 2k\bar{\eta})/4k]$, $\|(P'x_0)^{-1}Px_0\| \leqslant \bar{\eta}$, ([6, 7]) и некоторого шара с центром в x^* ([11]). В ([1]) установлено существование замкнутого множества S начальных точек сходимости (4), $z_{n-1} = x_i, z_n = x_j$, $i \leqslant j \leqslant n$, причем $\{[x\,] \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} [x_n, x_{n+1}]\} \subset S$.

Здесь показана сходимость (2), (3) при «плавающих» точках z_n, x_n, что в отличие от упомянутых выше фиксированных методов соответствует реальным вычислительным процессам. Полученные замкнутые множества точек z_n сходимости (2) и начальных точек сходимости (2), (3) характеризуют хорошую устойчивость процессов к погрешностям вычислений.

В частности, при $\delta = 0$ улучшены соответствующие результаты в работах ([1, 6–8, 11]).

Обозначим $A_n x \equiv x - L_n P x_n$, $L_n \equiv (V'z_n)^{-1}$; t^*, t^{**} — меньший и больший корень уравнения $0{,}5kt^2 - (1-\delta)t + \eta = 0$;

$$t_{n+1} = F_n(t_n), \quad F_n(t) \equiv t - [0{,}5kt^2 - (1-\delta)t + \eta] / (k\tau_n - 1). \qquad (6)$$

Теорема 1. *Пусть* $\{[x_0, A_0 x_0] \cup H[A_0 x_0, t^* - t_1]\} \subset \Omega$, $\|(V'x_0)^{-1} P x_0\| \leqslant \leqslant 0{,}5kt_0^2 - (1-\delta)t_0 + \eta$, $\eta \leqslant 0{,}5(1-\delta)^2 / k$, $t_0 \geqslant 0$.

Тогда в $H[A_0 x_0, t^* - t_1]$ *существует решение уравнения* (1), *и к нему сходится процесс* (2), $z_n \in \{\Omega \cap E[x_0, x_n; t_n]\}$ $(\|x_0 - z_n\| \leqslant \tau_n$, $\|z_n - x_n\| \leqslant \leqslant t_n - \tau_n)$, *причем* $\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant t^* - t_{n+1}$.

Доказательство. Пусть $t_0 < t^*$. Покажем по индукции, что $\|x_n - x_{n+1}\| \leqslant t_{n+1} - t_n$, $t_n < t_{n+1} < t^*$, $x_n \in \Omega$, существует линейный оператор L_n и $\|L_n P' x_0\| \leqslant 1 / (1 - k\|x_0 - z_n\|)$.

Так как $\|(V'x_0)^{-1} V'z_0 - (V'x_0)^{-1} V'x_0\| \leqslant k\|x_0 - z_0\| < kt^*$, то, применяя теорему Банаха, найдем, что существует линейный оператор L_0, причем $\|L_0 V'x_0\| \leqslant 1 / (1 - k\tau_0)$. Тогда $\|L_0 P x_0\| \leqslant \|L_0 V'x_0 (V'x_0)^{-1} P x_0\| \leqslant t_1 - t_0$. Пусть при $n = k$, $k \geqslant 0$, эти предложения выполняются. Тогда

$$\| A_{k-1} x_{k-1} - A_k x_k \| = \Big\| \int_0^1 L_k \{V' [x_{k-1} + \theta (x_k - x_{k-1})] - V' z_{k-1}\} (x_k - x_{k-1}) d\theta +$$

$$+ L_k (R x_{k-1} - R x_k) \Big\| \leqslant \frac{k}{1 - k\tau_k} \int_0^1 \{[t_{k-1} + \theta (t_k - t_{k-1})] - \tau_{k-1}\} (t_k - t_{k-1})\, d\theta +$$

$$+ \frac{\delta}{1 - k\tau_k} (t_k - t_{k-1}) = t_{k+1} - t_k.$$

Так как $F_k'(t)$, $F_k'(t) > 0$, $t \in (t_k, t^*)$, то $t_k < t_{k+1} < t^*$ и $\{t_n\}$ сходится к t^*. Из $\|x_1 - x_{k+1}\| \leqslant t_{k+1} - t_1 \leqslant t^* - t_1$ следует $x_{k+1} \in \Omega$. Так как $\|(V'x_0)^{-1} V'x_0 - - (V'x_0)^{-1} V'z_{k+1}\| \leqslant k\|x_0 - z_{k+1}\| < kt^*$, то $\|L_{k+1} V'x_0\| \leqslant 1 / (1 - k\|x_0 - z_{k+1}\|)$.

Далее, по индукции получаем

$$\| A_n x_n - A_n x \| =$$

$$= \Big\| \int_0^1 L_n \{V' [x_n + \theta (x - x_n)] - V' z_n\} (x - x_n)\, d\theta + L_n (R x_n - R x) \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k}{1 - k\tau_n} \int_0^1 [t_n + \theta (t^* - t_n) - \tau_n] (t^* - t_n)\, d\theta + \frac{\delta}{1 - k\tau_n} (t^* - t_n) = t^* - t_{n+1},$$

где $x \in \{\Omega \cap H[x_0, t^*]\}$, $n = 0$. Таким образом, A_n, $n = 1, 2, \ldots$, (A_0) отображает $H[x_n, t^* - t_n]$ $(\Omega \cap H[x_0, t^*])$ в множество, принадлежащее $H[x_{n+1}, t^* - t_{n+1}]$ $(H[x_1, t^* - t_1])$. Учитывая $\|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x^*\| \leqslant t^* - t_n$ и применяя теорему о последовательности вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, придем к утверждениям теоремы.

Замечание 1. Так как $\|x_0 - x\| + \|x - x_{n+1}\| \leqslant \|x_0 - x\| + \|x - x_n\| + + \|x_n - x_{n+1}\| \leqslant t_{n+1}$, где $x \in E[x_0, x_n; t_n]$, то $E[x_0, x_n; t_n] \subset E[x_0, x_{n+1}; t_{n+1}]$ и $E[x_0, x_n; t_n] \subset E[x_0, x^*; t^*]$. Таким образом, x_n, $z_n \in E[x_0, x^*; t^*]$ и частным случаем (2) является процесс $x_{n+1} = x_n - (V'x_k)^{-1} P x_n$, $k \in [0, 1, \ldots \ldots, n]$.

Замечание 2. Очевидно, наибольший M-эллипс $E[x_0, x_n; t_n]$ точек z_n сходимости (2) будет при возможно наибольшем значении t_0. Приняв в качестве η ее предельное значение из условий теоремы, получим $\max t_0 = = (1 - \delta - \sqrt{2k\|(V'x_0)^{-1} P x_0\|}) / k$.

З а м е ч а н и е 3. Из доказательства теоремы следует существование и сходимость к x^* процесса

$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n L_n P x_n, \qquad 0 < \alpha_n \leqslant 1, \tag{9}$$

причем $\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant t^* - t_{n+1}$, где $t_{n+1} = t_n - \alpha_n[0{,}5kt_n^2 - (1 - \delta)t_n + \eta]/(k\tau_n - 1)$. Оценка сходимости следует из $\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant t^* - t_n - \alpha_n[F_n(t_n) - t_n]$. Сходимость процесса (9) при $V = P$ показана в ([11]).

Поступило
10 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. E. D e n n i s, SIAM J. Numer. Anal., 6, № 3 (1969). [2] И. А. К у с а к и н, Тр. семинара по функциональному анализу Воронежского унив., № 10, 31 (1968). [3] О. І. З і н ч е н к о, Доп. АН УРСР, № 2, 156 (1963). [4] М. А. К р а с н о с е л ь с к и й, Г. М. В а й н и к к о и др., Приближенное решение операторных уравнений, «Наука», 1969. [5] И. Н. О к и н ш е в и ч, Сибирск. матем. журн., **12**, № 4, 913 (1971). [6] Л. В. К а н т о р о в и ч, Г. П. А к и л о в, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959. [7] Л. В. К а н т о р о в и ч, Вестн. Ленингр. унив., матем., мех. и астр., № 7, в. 2, 68 (1957). [8] Л. В. К а н т о р о в и ч, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **28**, 104 (1949). [9] Л. В. К а н т о р о в и ч, УМН, **3**, № 6, 89 (1948). [10] R. G. B a r t l e, Proc. Am. Math. Soc., 6, № 5, 827 (1955). [11] Б. А. Б е р т г е й м, Сборн. научн. тр. Пермского политехнич. инст., № 7, 3 (1960).