

УДК 512.548

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_84

EDN: IJQIOV

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ ФАКТОРГРУППЫ ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУПП СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. I

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

POLYADIC QUOTIENT GROUPS OF POLYADIC GROUPS OF SPECIAL FORM. I

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье изучаются l -арные факторгруппы полиадических групп специального вида, то есть полиадических групп с l -арной операцией $\eta_{s, \sigma, k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ с помощью подстановки $\sigma \in S_k$, порядка, делящего $l - 1$, и n -арной операции η .

Ключевые слова: полиадическая операция, полуинвариантная l -арная подгруппа, n -полуинвариантная l -арная подгруппа, факторгруппа, конгруэнция, смежный класс.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Полиадические факторгруппы полиадических групп специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 84–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_84. – EDN: IJQIOV

Abstract. The article studies of l -ary quotient groups of polyadic groups of special form, that is polyadic groups with l -ary operation $\eta_{s, \sigma, k}$ that is called polyadic operation of special form and is defined on Cartesian power A^k of n -ary group $\langle A, \eta \rangle$ by substitution $\sigma \in S_k$ which order divides $l - 1$ and n -ary operation η .

Keywords: polyadic operation, semiinvariant l -ary subgroup, n -semiinvariant l -ary subgroup, quotient group, congruence, coset.

For citation: Gal'mak, A.M. Polyadic quotient groups of polyadic groups of special form. I / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 84–89. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_84 (in Russian). – EDN: IJQIOV

Введение

Данная статья посвящена изучению l -арных факторгрупп l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ специального вида по её полуинвариантным l -арным подгруппам. Определение l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, которая определяется с помощью подстановки σ множества $\{1, \dots, k\}$ и n -арной операции η на декартовой степени A^k n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$, можно найти в [1]. Для бинарной операции η l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$, где $l = s + 1$, совпадает с $(s + 1)$ -арной операцией $[\]_{s+1, \sigma, k}$, обозначаемой также символом $[\]_{l, \sigma, k}$. Изучению этой операции посвящена книга [2]. Частными случаями l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, соответствующими циклу $\sigma = (12 \dots k)$, являются две полиадические операции Э. Поста [3]. Одну из них он определил на декартовой степени симметрической группы, вторую – на декартовой степени полной линейной группы над полем комплексных чисел. Если $k = 1$, то подстановка σ является тождественной, а l -арная операция $\eta_{s, \sigma, 1}$ в этом

случае является производной от n -арной операции η . В частности, если $n = 2$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, 1}$ является производной от бинарной операции η .

В [4, теорема 3.1] доказано, что если подстановка $\sigma \in S_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то универсальная алгебра $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. В связи с этим результатом возникает вопрос: *А может ли k -ая декартова степень H^k некоторого смежного класса H n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$, отличного от B , быть замкнутой относительно l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ и, более того, быть l -арной подгруппой в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$?*

Для $k = 1$ положительный ответ на поставленный вопрос получен в [5]. Положительный ответ на этот же вопрос для $k \geq 1$ даёт теорема 2.1, которая является основным результатом данной статьи.

1 Используемые результаты

Следующая теорема используется при получении основного результата данной статьи.

Теорема 1.1 [1]. Если $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа.

Напомним, что для всякой полуинвариантной n -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ множество

$$A/B = \{ \eta(\underbrace{a B \dots B}_{n-1}) \mid a \in A \} = \\ = \{ \eta(\underbrace{B \dots B a}_{n-1}) \mid a \in A \}$$

всех смежных классов $\langle A, \eta \rangle$ по $\langle B, \eta \rangle$ является n -арной группой относительно n -арной операции η . Эту n -арную группу называют [6, с. 59] n -арной факторгруппой и обозначают символом $\langle A/B, \eta \rangle$.

Определение n -полуинвариантных l -арных подгрупп l -арной группы, которые используются в данной статье, имеются в [5]. Там же в [5] можно найти и определение Поста [3] эквивалентных последовательностей, составленных из элементов n -арной группы.

При получении основного результата данной статьи существенно используется следующая лемма.

Лемма 1.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная группа, $\langle B, \eta \rangle$ – её полуинвариантная n -арная подгруппа, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) \in A^k$, $d \in A$, $H = \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1})$.

Тогда:

$$1) \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{l-t}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(1)} \underbrace{d \dots d}_{l-t} B \dots B) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(k)} \underbrace{d \dots d}_{l-t} B \dots B))$$

для любого $t = 1, \dots, l$;

$$2) \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{(s+1-i)(n-1)}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)} B \dots B) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)} B \dots B))$$

для любого $i = 1, \dots, s+1$;

$$3) \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{l-1}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{x_1 d \dots d}_{l-1} B \dots B) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(\underbrace{x_k d \dots d}_{l-1} B \dots B));$$

$$4) \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(1)} \underbrace{d \dots d}_{n-1}) \times \dots$$

$$\dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(k)} \underbrace{d \dots d}_{n-1} B \dots B));$$

5) если подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1})).$$

Доказательство. 1) Так как $\langle B, \eta \rangle$ полуинвариантная парная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{l-t}) = \\ = \{ \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_{t-1} \mathbf{x} \mathbf{h}_{t+1} \dots \mathbf{h}_{s(n-1)+1}) \mid \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{t-1}, \\ \mathbf{h}_{t+1}, \dots, \mathbf{h}_{s(n-1)+1} \in \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1})^k \} =$$

$$= \{ \eta_{s, \sigma, k}((\eta(db_{111} \dots b_{11(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(db_{1k1} \dots b_{1k(n-1)})) \dots \\ \dots (\eta(db_{(t-1)11} \dots b_{(t-1)1(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(db_{(t-1)k1} \dots b_{(t-1)k(n-1)})) (x_1, \dots, x_k) \\ (\eta(db_{(t+1)11} \dots b_{(t+1)1(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(db_{(t+1)k1} \dots b_{(t+1)k(n-1)})) \dots \\ \dots (\eta(db_{(l-1)11} \dots b_{(l-1)1(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(db_{(l-1)k1} \dots b_{(l-1)k(n-1)})) \\ (\eta(db_{l11} \dots b_{l1(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(db_{lk1} \dots b_{lk(n-1)})) \mid b_{\alpha\beta\gamma} \in B \} = \\ = \{ \eta(\eta(db_{111} \dots b_{11(n-1)}) \eta(db_{2\sigma(1)1} \dots b_{2\sigma(1)(n-1)}) \dots \\ \dots \eta(db_{(t-1)\sigma^{l-2}(1)1} \dots b_{(t-1)\sigma^{l-2}(1)(n-1)}) x_{\sigma^{l-1}(1)} \\ \dots \eta(db_{(t+1)\sigma^l(1)1} \dots b_{(t+1)\sigma^l(1)(n-1)}) \\ \dots \eta(db_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)1} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(1)(n-1)}) \\ \eta(db_{l\sigma^{l-1}(1)1} \dots b_{l\sigma^{l-1}(1)(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(\eta(db_{1k1} \dots b_{1k(n-1)}) \eta(db_{2\sigma(k)1} \dots b_{2\sigma(k)(n-1)}) \dots \\ \dots \eta(db_{(t-1)\sigma^{l-2}(k)1} \dots b_{(t-1)\sigma^{l-2}(k)(n-1)}) x_{\sigma^{l-1}(k)} \\ \eta(db_{(t+1)\sigma^l(k)1} \dots b_{(t+1)\sigma^l(k)(n-1)}) \dots \\ \dots \eta(db_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)1} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(k)(n-1)}) \\ \eta(db_{l\sigma^{l-1}(k)1} \dots b_{l\sigma^{l-1}(k)(n-1)})) \mid b_{\alpha\beta\gamma} \in B \} =$$

{далее применяется полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ }

$$= \{ (\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(1)} \underbrace{d \dots d}_{l-t} b_{11} \dots b_{1(n-1)}), \dots \\ \dots, \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(k)} \underbrace{d \dots d}_{l-t} b_{k1} \dots b_{k(n-1)}) \mid b_{\alpha\beta} \in B \} = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(1)} \underbrace{d \dots d}_{l-t} B \dots B) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_{\sigma^{l-1}(k)} \underbrace{d \dots d}_{l-t} B \dots B)).$$

Следовательно, верно доказываемое равенство.

2) Полагаем в 1) $t = (i-1)(n-1) + 1$.

3) Полагаем в 1) $t = l$.

4) Полагаем в 1) $t = l$.

5) Следует из 4), так как подстановка σ^{l-1} является тождественной. $\square$

Замечание 1.1. Утверждения 2) и 3) леммы 1.1 можно доказать непосредственно, проводя вычисления, аналогичные тем, которые использовались при доказательстве утверждения 1).

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, существуют элементы $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) для смежного класса $H = \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1})$

n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$ декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) для полуинвариантных в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арных подгрупп $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ соответствующие l -арные факторгруппы совпадают:

$$\langle A^k/H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle;$$

3) конгруэнции ρ_{H^k} и ρ_{B^k} l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, определяемые полуинвариантными l -арными подгруппами $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ совпадают: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) если $B \neq A$, для некоторого $i = 2, \dots, s$ подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ не является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Доказательство. 1) Если

$$\mathbf{h}_i = (h_{i1}, \dots, h_{ik}) = (\eta(db_{i1} \dots b_{i(n-1)}), \dots, \eta(db_{ik1} \dots b_{ik(n-1)})), i = 1, \dots, l$$

произвольные элементы из H^k , то, положив

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_l) = (y_1, \dots, y_k),$$

и, используя определение операции $\eta_{s, \sigma, k}$, тождественность подстановки σ^{l-1} , и полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$, будем иметь

$$\begin{aligned} y_j &= \eta(\eta(db_{1j} \dots b_{1j(n-1)}) \eta(db_{2j} \dots b_{2j(n-1)}) \dots \\ &\dots \eta(db_{(l-1)j} \dots b_{(l-1)j(n-1)}) \eta(db_{lj} \dots b_{lj(n-1)})) \in \\ &\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}). \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } y_j \in \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

А так как последовательность $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ эквивалентна последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, то

$$y_j \in \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}) = H$$

для любого $j = 1, \dots, k$, откуда

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_l) \in H^k,$$

что означает замкнутость множества H^k относительно l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

Рассмотрим теперь в $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ уравнение

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_l) = \mathbf{g}, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{g} &= (g_1, \dots, g_k) = \\ &(\eta(dc_{11} \dots c_{1(n-1)}), \dots, \eta(dc_{k1} \dots c_{k(n-1)})) \in H^k, \\ &c_{11}, \dots, c_{1(n-1)}, \dots, c_{k1}, \dots, c_{k(n-1)} \in B. \end{aligned}$$

Элементы $\mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_l$ были определены выше и также принадлежат множеству H^k .

Так как подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная группа. Поэтому уравнение (2.1) имеет в ней решение

$$\mathbf{x} = (a_1, \dots, a_k) \in A^k.$$

Подставив это решение в (2.1), получим равенство

$$\eta_{s, \sigma, k}((a_1, \dots, a_k) \mathbf{h}_2 \dots \mathbf{h}_l) = \mathbf{g}. \quad (2.2)$$

Обозначим j -ю компоненту в левой части полученного равенства через f_j . Рассуждая также как при вычислении y_j , получим

$$\begin{aligned} f_j &= \eta(a_j \eta(db_{2\sigma(j)1} \dots b_{2\sigma(j)(n-1)}) \dots \\ &\dots \eta(db_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)1} \dots b_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)(n-1)}) \\ &\eta(db_{lj1} \dots b_{lj(n-1)}) \in \\ &\in \eta(a_j \underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(a_j \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \end{aligned}$$

то есть

$$f_j = \eta(a_j v_1 \dots v_{n-1})$$

для некоторых $v_1, \dots, v_{n-1} \in B$. А так как согласно (2.2), $f_j = g_j$, то

$$\eta(a_j v_1 \dots v_{n-1}) = \eta(dc_{j1} \dots c_{j(n-1)}).$$

Следовательно,

$$\eta(a_j v_1 \dots v_{n-1}) \in \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}),$$

откуда учитывая, что, $v_1, \dots, v_{n-1} \in B$, а также то, что $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle A, \eta \rangle$, получаем

$$a_j \in \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}) = H, j = 1, \dots, k.$$

Поэтому

$$\mathbf{x} = (a_1, \dots, a_k) \in H^k,$$

и значит уравнение (2.1) разрешимо в $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Аналогично доказывается разрешимость в $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ уравнения

$$\eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_{l-1} \mathbf{y}) = \mathbf{g}$$

для любых $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_{l-1}, \mathbf{g} \in H^k$. Таким образом, согласно аксиоматике Поста для n -арных групп, $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – l -арная подгруппа в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

Если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k , то по лемме 1.1 (утверждения 3) и 5))

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1}) &= \\ &= \eta(\eta(x_1 \underbrace{d \dots d}_{l-1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ &\dots \times \eta(\eta(x_k \underbrace{d \dots d}_{l-1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \end{aligned}$$

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_1) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} x_k) \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Если в правой части первого из полученных равенств учесть эквивалентность последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{l-1} \text{ и } b_1 \dots b_{n-1}, \\ \text{где } b_1, \dots, b_{n-1} \in B, \text{ то получим} \\ \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{l-1}) = \\ = \eta(\underbrace{x_1 B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{x_k B \dots B}_{n-1}), \quad (2.3)$$

Если в правой части второго из полученных равенств воспользоваться полуинвариантностью $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$, а также учесть эквивалентность указанных выше последовательностей, то получим

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \\ = \eta(\underbrace{B \dots B x_1}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B x_k}_{n-1}). \quad (2.4)$$

Из (2.4) и полуинвариантности $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ следует

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}) = \\ = \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}). \quad (2.5)$$

Тогда из (2.3) и (2.5) следует равенство

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{l-1}) = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}).$$

Следовательно, l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ полуинвариантна в l -арной группе $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

2) Если в лемме 1.1 $d \in B$, то $H = B$, при этом утверждение 3) принимает вид

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}) = \\ = \eta(x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}),$$

откуда и из (2.3) следует

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{l-1}) = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} B^k \dots B^k}_{l-1}).$$

Следовательно, l -арные факторгруппы

$$\langle A^k/H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle \text{ и } \langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$$

совпадают.

3) Так как конгруэнция ρ_{B^k} и полуинвариантная l -арная подгруппа $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ определяют одну и ту же факторгруппу; аналогично конгруэнция ρ_{H^k} и полуинвариантная l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ определяют одну и ту же факторгруппу:

$$\langle A^k/\rho_{B^k}, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle,$$

$$\langle A^k/\rho_{H^k}, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle,$$

то, согласно 2),

$$\langle A^k/\rho_{H^k}, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/\rho_{B^k}, \eta_{s, \sigma, k} \rangle,$$

что означает совпадение конгруэнций ρ_{H^k} и ρ_{B^k} .

4) Если $d \in B$, то $H = B$ и применяется утверждение 2) теоремы 4.1 из [7]. Поэтому считаем $d \notin B$, откуда

$$H = \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}) \neq B. \quad (2.6)$$

Так как подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ не является тождественной, то $\sigma^{(i-1)(n-1)}(j) \neq j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, k\}$. Зафиксируем элемент $b \in B$ и выберем в A^k элемент $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ так, что $x_j = d$, а элемент $x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}$ является решением уравнения

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{d z d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) = b, \text{ то есть} \\ \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) = b. \quad (2.7)$$

Все остальные компоненты в $(x_1, \dots, x_k)$ могут быть любыми из множества A .

Если предположить n -полуинвариантность $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, то

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{l-1}) = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{(s+1-i)(n-1)})$$

для выбранного $\mathbf{x}$. Перепишем последнее равенство, применив к его левой части утверждение 3) леммы 1.1, а к правой – утверждение 2) этой же леммы:

$$\eta(\eta(x_1 \underbrace{d \dots d}_{l-1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(x_k \underbrace{d \dots d}_{l-1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}),$$

откуда

$$\eta(\eta(x_j \underbrace{d \dots d}_{l-1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

Используя в левой части полученного равенства эквивалентность последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{l-1} \text{ и } b_1 \dots b_{n-1},$$

а также равенство $x_j = d$, а в правой части равенство (2.7), получим $\eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}) = B$, что противоре-

чит (2.6). Таким образом, $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. $\square$

Так как при $k=1$ l -арная группа $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является производной от n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то, полагая в теореме 2.1 $k=1$, получим теорему 2.1 из [5].

Замечание 2.1. В доказательстве утверждения 2) теоремы 2.1 вместо леммы 1.1 можно было воспользоваться утверждением 3) леммы 2.1 из [4].

Замечание 2.2. Предположим, что элемент $x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}$ в равенстве (2.7) совпадает с d . Тогда эквивалентность последовательностей $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, влечёт

$$b = \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) = (\underbrace{d \dots d}_{l-1}) \in \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}),$$

то есть $b \in \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1})$. Это невозможно, так как

$$\text{для } d \notin B \text{ верно равенство } B \cap \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}) = \emptyset.$$

Таким образом, элемент $x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(j)}$ в (2.7) отличен от $d = x_j$. Если $\sigma^{(i-1)(n-1)}(j) = j$, то такое невозможно.

Теорема 2.2. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, существуют элементы $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) для смежного класса $H = \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1})$

n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$ декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

2) для полуинвариантных в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ l -арных подгрупп $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ соответствующие l -арные факторгруппы совпадают:

$$\langle A^k/H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle;$$

3) конгруэнции ρ_{H^k} и ρ_{B^k} l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$, определяемые полуинвариантными l -арными подгруппами $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ совпадают: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) если $B \neq A$, для некоторого $i = 2, \dots, s$ подстановка $\sigma^{(i-1)(n-1)}$ не является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$.

5) если подстановка σ^{n-1} является тождественной, то $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ – n -полуинвариантная l -арная подгруппа l -арной группы $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$;

Доказательство. 1)–4). Так как последовательности $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в

смысле Поста в $\langle A, \eta \rangle$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, то существуют $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1} = \underbrace{d \dots d}_{s(n-1)}$ и $c_1 \dots c_{n-1}$ эквива-

лентны в смысле Поста. Таким образом, выпол-

няются все условия теоремы 2.1, что означает справедливость утверждений 1)–4) этой теоремы.

5) Если $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$ – произвольный элемент из A^k , то, применяя утверждение 2) леммы 1.1, тождественность подстановки σ^{n-1} , полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ и эквивалентность последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{n-1} \text{ и } b_1 \dots b_{n-1},$$

получим

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{(s+1-i)(n-1)}) &= \\ = \eta(\eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(1)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ \dots \times \eta(\eta(x_{\sigma^{(i-1)(n-1)}(k)} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}) &= \\ = \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_1 \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \\ \dots \times \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_k \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) &= \\ = \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_1 \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \times \dots \times \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} x_k \underbrace{B \dots B}_{n-1}) &= \\ = \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1} x_1) \times \dots \times \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1} x_k) &= \\ = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_1) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_k), \end{aligned}$$

то есть

$$\eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{(i-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{(s+1-i)(n-1)}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_1) \times \dots \times \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_k)$$

для любого $i = 1, \dots, s+1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{\mathbf{x} H^k \dots H^k}_{l-1}) &= \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{n-1} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{(s-1)(n-1)}) = \\ &= \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{(s-1)(n-1)} \mathbf{x} \underbrace{H^k \dots H^k}_{n-1}) = \eta_{s, \sigma, k}(\underbrace{H^k \dots H^k}_{l-1} \mathbf{x}). \end{aligned}$$

Следовательно, $\langle H^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ является n -полуинвариантной в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$. $\square$

Согласно Посту [3], v -ой n -адической степени элемента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется элемент этой же n -арной группы, обозначаемый символом $a^{[v]}$ и определяемый следующим образом:

$$a^{[v]} = a, \text{ если } v = 0; \\ a^{[v]} = \eta(\underbrace{a \dots a}_{v(n-1)+1}), \text{ если } v > 0;$$

$$a^{[v]} - \text{решение уравнения } \eta(\underbrace{x a \dots a}_{-v(n-1)}) = a, \\ \text{если } v < 0.$$

Замечание 2.3. В группе полиадическая степень и обычная степень одного и того же элемента связаны равенством

$$a^{[v]} = a^{v+1}$$

для любого целого v . В частности, $a^{[0]} = a^1 = a$.

Напомним, что конечным n -адическим порядком элемента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется [3], [6] наименьшее целое положительное число m , для которого выполняется равенство $a^{[m]} = a$.

Пост доказал [3], что если элемент a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ имеет конечный n -адический порядок m , то $a^{[s]} = a$ тогда и только тогда, когда s кратно m .

Теорема 2.3. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, элемент $d \in A$ имеет n -адический порядок, делящий s ; подстановка $\sigma \in S_k$ имеет порядок, делящий $l-1$. Тогда справедливы утверждения 1)–4) теоремы 2.1.

Доказательство. Так как элемент $d \in A$ имеет n -адический порядок, делящий s , то $d^{[s]} = d$, откуда согласно определению n -адической степени, следует

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{s(n-1)+1}) = d,$$

что означает нейтральность в $\langle A, \eta \rangle$ последовательности $\underbrace{d \dots d}_{s(n-1)} = \underbrace{d \dots d}_{l-1}$. В n -арной подгруппе $\langle B, \eta \rangle$ существуют нейтральные последовательности, составленные из элементов множества B , при этом эти последовательности являются нейтральными и в $\langle A, \eta \rangle$. А так как все нейтральные последовательности любой n -арной группы эквивалентны в смысле Поста, то последовательность $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ эквивалентна некоторой

последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$. Так как выполняются все условия теоремы 2.1, то справедливы утверждения 1)–4) теоремы 2.1. □

Для идемпотента d n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ последовательность $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ является нейтральной

и поэтому она эквивалентна любой нейтральной последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$, составленной из элементов n -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$. Таким образом, считая в теореме 2.2 d идемпотентом, получим следующий результат.

Теорема 2.4. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, d – идемпотент в $\langle A, \eta \rangle$, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда справедливы утверждения 1)–5) теоремы 2.2.

Если в теореме 2.1. положить $n = 2$, то получим следующий результат.

Теорема 2.5. Пусть B – нормальная подгруппа группы A , в A существует такой элемент d , что $d^{l-1} \in B$; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда:

1) для смежного класса $H = dB$ факторгруппы A/B декартова степень H^k замкнута относительно l -арной операции $[\]_{l, \sigma, k}$, а универсальная алгебра $\langle H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является

полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$;

2) для полуинвариантных в $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ l -арных подгрупп $\langle H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ соответствующие l -арные факторгруппы совпадают:

$$\langle A^k/H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle = \langle A^k/B^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle;$$

3) конгруэнции ρ_{H^k} и ρ_{B^k} l -арной группы $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$, определяемые полуинвариантными l -арными подгруппами $\langle H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ и $\langle B^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ совпадают: $\rho_{H^k} = \rho_{B^k}$;

4) если $B \neq A$, для некоторого $i = 2, \dots, l-1$ подстановка σ^{i-1} не является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ не является инвариантной в $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$;

5) если подстановка σ является тождественной, то l -арная подгруппа $\langle H^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$ является инвариантной в $\langle A^k, [\]_{l, \sigma, k} \rangle$.

Из теоремы 2.5. вытекает

Следствие 2.1. Пусть B – нормальная подгруппа группы A , в A существует такой элемент d , что d^{l-1} – единица группы A ; подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда справедливы утверждения 1)–5) теоремы 2.5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О разрешимости уравнений в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.
2. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
3. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
4. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 3 (60). – С. 54–58.
5. Гальмак, А.М. Смежные классы, являющиеся полиадическими подгруппами / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 44–50.
6. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
7. Гальмак, А.М. Полиадические аналоги нормальных подгрупп в полиадических группах специального вида. II / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2024. – № 4 (61). – С. 45–47.

Поступила в редакцию 04.08.2025.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор