Доклады Академии наук СССР
1972. Том 207, № 5

УДК 517.946 МАТЕМАТИКА

В. Я. ИВРИЙ

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 IV 1972)

В настоящей работе продолжается начатое в ([4], [5]) исследование вопроса: когда нехарактеристическая задача Коши хорошо поставлена вне зависимости от младших членов?

Будем придерживаться следующих обозначений: $x = (x_0, \ldots, x_l) \in \Omega$. Ω — область в R^{l+1}; $\xi = (\xi_0, \ldots, \xi_l) \in R^{l+1} \setminus \{0\}$; $\Omega_T{}^+ = \{x \in \Omega, \quad x_0 \geqslant T\}$, $S_T = \{x \in \Omega, x_0 = T\}$; $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω.

$$L(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) \xi^\alpha, \quad L_s(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = s} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_l)$ — мультииндекс, $0 \leqslant s \leqslant m$.

Будем предполагать, что $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$ и $a_{(m, 0, \ldots, 0)}(x) \equiv L_m(x, (1, 0, \ldots \ldots, 0))$ вещественна и нигде в Ω в нуль не обращается.

$$L^{(j)}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} L(x, \xi), \quad L_{,j}(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial x_j} L(x, \xi),$$
$$L \equiv L(x, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha(x) D^\alpha,$$

где $D = (D_0, \ldots, D_l)$, $D_j = -i \dfrac{\partial}{\partial x_j}$.

Определение 1. Рассмотрим задачу Коши в слабой форме:

$$Lu = f, \tag{1w}$$

$$\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}_T^+. \tag{2w}$$

Будем называть задачу Коши **слабо хорошо поставленной**, если для любой $f \in C_0{}^\infty(\Omega_T{}^+)$ существует $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, удовлетворяющая (1$w$), (2$w$), и если из того, что $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ удовлетворяет (1w), (2w) и $\operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}_t{}^+$, следует, что и $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}_t{}^+$, при произвольном $t > T$.

Определение 2. Рассмотрим задачу Коши в более сильной форме:

$$Lu = f \quad \text{в} \quad \Omega_T^+, \tag{1s}$$
$$D_0^j u|_{S_T} = \varphi_j, \quad j = 0, \ldots, m-1. \tag{2s}$$

Будем называть задачу Коши **сильно хорошо поставленной**, если для любых $f \in C^\infty(\Omega)$, $\varphi_j \in C^\infty(S_T)$ задача (1s), (2s) имеет решение $u \in C^\infty(\Omega_t{}^+)$ и если из того, что $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ удовлетворяет (1w), (2w) и $\operatorname{supp} f \subset \overline{\Omega}_t{}^+$, следует, что и $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}_t{}^+$, при произвольном $t > T$.

Определение 3. Гиперболический относительно D_0 в Ω оператор L назовем **слабо (сильно) регулярно гиперболическим относительно** D_0 в Ω, если для любой точки $\hat{x} \in \Omega$ существует окрестность $G \ni \hat{x}$ и число $T_1 < \hat{x}_0$ такие, что задача Коши будет слабо (сильно) хорошо поставлена в G при любом $T \geqslant T_0$ для всех операторов L', отличающихся от L гладкими младшими членами.

Определение 4. Пусть $(\hat{x}, \hat{\xi}) \in \Omega \times (R^{l+1} \setminus \{0\})$ и

$$L_m(\hat{x}, \hat{\xi}) = L_m^{(j)}(\hat{x}, \hat{\xi}) = L_{m,j}(\hat{x}, \hat{\xi}) = 0, \quad j = 0, \ldots, l. \tag{3}$$

Введем $(l+1) \times (l+1)$-матрицы $A = (L_m^{(ij)}(\hat{x}, \hat{\xi}))$, $B = (L_{m,j}^{(i)}(\hat{x}, \hat{\xi}))$, $C = (L_{m,ij}(\hat{x}, \hat{\xi}))$, где i — номер строки, и $(2l+2) \times (2l+2)$-матрицу

$$F \equiv F(\hat{x}, \hat{\xi}) = \begin{pmatrix} -B & A \\ -C & B^* \end{pmatrix}, \tag{4}$$

которую будем называть **фундаментальной матрицей**.

Можно доказать следующие свойства фундаментальной матрицы:

1) Фундаментальные матрицы, вычисленные в разных системах координат, подобны.

2) Если L гиперболичен, то либо все собственные числа фундаментальной матрицы являются чисто мнимыми, либо имеется два простых вещественных отличных от нуля собственных числа λ и $-\lambda$, а все остальные собственные числа — чисто мнимые.

Теорема 1. *Если L слабо регулярно гиперболичен относительно D_0 в Ω и если $(\hat{x}, \hat{\xi}) \in \Omega \times (R^{l+1} \setminus \{0\})$,*

$$L_m(\hat{x}, \hat{\xi}) = L_m^{(j)}(\hat{x}, \hat{\xi}) = L_{m,j}(\hat{x}, \hat{\xi}) = 0, \quad j = 0, \ldots, l,$$

то фундаментальная матрица $F(\hat{x}, \hat{\xi})$ имеет пару ненулевых вещественных собственных чисел.

Замечание. В противном случае для слабой хорошей поставленности задачи Коши необходимо (но далеко недостаточно) выполнение условия на младшие члены

$$\operatorname{Im} L'_{m-1}(\hat{x}, \hat{\xi}) = 0,$$

где $L'_{m-1}(x, \xi) \equiv L_{m-1}(x, \xi) + \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{l} L_{m,j}^{(j)}(x, \xi)$.

При некотором дополнительном предположении удается доказать также второе ограничение на младшие члены:

$$|L'_{m-1}(\hat{x}, \hat{\xi})| \leqslant \mu \equiv \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{2l+2} |\lambda_j|, \tag{5}$$

где λ_j — собственные числа фундаментальной матрицы; анализ модельных уравнений показывает, что (5) должно быть и без дополнительного предположения. Но в общем случае этого доказать не удалось.

Весьма правдоподобным представляется нам предположение о том, что условие, полученное нами в теореме 1 как необходимое для слабой регулярной гиперболичности, на самом деле является также и достаточным для сильной регулярной гиперболичности. Доказательство достаточности получено в следующих случаях:

1) Если $\mathfrak{M} = \{(x, \xi) \in \Omega \times (R^{l+1} \setminus \{0\}),\ L_m(x, \xi) = 0\}$ является C^∞-многообразием (с самопересечениями) [5];

2) если $l = 1$, $m = 2$ (это нетрудно вывести из теорем работы [2]);

3) если $l = 1$ и в окрестности любой точки $(x, \hat{\xi}) \in \Omega \times (R^{l+1} \setminus \{0\})$ такой, что выполнено (3), имеет место представление

$$L_m(x, \xi) = S_0^2(x, \xi) - \sum_{j=1}^{r} S_j^2(x, \xi),$$

где $S_j \in C^\infty$, $S_j(\hat{x}, \hat{\xi}) = 0$, $j = 0, \ldots, r$, и $(\operatorname{grad}_{x,\xi} S_j)(\hat{x}, \hat{\xi})$, $j = 0, \ldots, r$, линейно независимы. При этом r может зависеть от (x, ξ). (Это новый результат, полученный методами, являющимися развитием методов работ [4, 5]).

Замечание. От ограничения $l = 1$ в двух последних утверждениях можно избавиться, но придется потребовать выполнения некоторых условий, которые всегда имеют место при $l = 1$, но ограничительны и весьма неестественны в общем случае.

В пользу нашего предположения говорит также и следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\hat{\xi} \in R^{l+1} \setminus \{0\}$, A, B, C — *матрицы такие, что*

I. $A^* = A$, $C^* = C$, $A\hat{\xi} = B^*\hat{\xi} = 0$; *квадратичная форма от* $(2l + 2)$ *переменных* (x, ξ) $\quad A\xi \cdot \xi + 2Bx \cdot \xi + Cx \cdot x$ *имеет сигнатуру* $(1, \cdot, \cdot)$, $Ae_0 \cdot e_0 > 0$, *где* $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$.

II. *Матрица* F, *построенная из* A, B, C *по формуле* (4), *имеет пару ненулевых вещественных собственных чисел.*

Пусть $2 \leqslant m$ — *целое число,* d — *комплексное число.*

Тогда существует $L(x, D)$ — *гиперболический относительно* D_0 *в* R^{l+1} *оператор порядка* m *такой, что*

$$\text{I}'.\ L_m(0, \hat{\xi}) = L_m^{(j)}(0, \hat{\xi}) = L_{m,j}(0, \hat{\xi}) = 0, \quad j = 0, \ldots, l;$$
$$L_m^{(ij)}(0, \hat{\xi}) = A^{ij}, \quad L_{m,j}^{(i)}(0, \hat{\xi}) = B_j^i, \quad L_{m,ij}(0, \hat{\xi}) = C_{ij},$$
$$\text{II}'.\ L'_{m-1}(0, \hat{\xi}) = d$$

и задача Коши для L *сильно хорошо поставлена.*

Замечание. Условие I) необходимо для существования гиперболического относительно D_0 в некоторой окрестности нуля оператора L такого, что выполнено I′) и

$$L_m^{(00)}(0, \hat{\xi}) > 0.$$

Новосибирский государственный
университет

Поступило
27 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Mizohata, J. Math. Kyoto Univ., 1, № 1, 109 (1961). [2] O. A. Oleinik, Comm. Pure Appl. Math., 23, № 4, 569 (1970). [3] В. Я. Иврий, ДАН, 197, № 3, 517 (1971). [4] В. Я. Иврий, ДАН, 201, № 4, 778 (1971). [5] В. Я. Иврий, ДАН, 204, № 6, 1303 (1972).