Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 6

УДК 534.26 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

Я. Н. ФЕЛЬД

ДИФРАКЦИЯ СКАЛЯРНОЙ ВОЛНЫ НА НЕЗАМКНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 24 II 1972)

Пусть первичное поле $\psi^0(q)$ дифрагирует на незамкнутой поверхности (Ляпунова) s, краем которой служит гладкий контур L. Вторичное поле $\psi(q)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \tag{1}$$

во всем пространстве вне $\bar{s} = s + L$ и граничным условиям Дирихле *

$$\psi^+ = \psi^- = -\psi^0 \quad \text{на} \quad s. \tag{2}$$

Кроме того, ψ подчиняется условиям типа Майкснера ([1]) ** на контуре L и условиям излучения на бесконечности.

Как известно, эта задача имеет единственное решение.

Целью настоящей работы является доказательство существования и построение последнего, путем обобщения метода Энскога.

Введем поверхностный «ток» на s при помощи выражения

$$w = \partial\psi^+ / \partial n - \partial\psi^- / \partial n. \tag{3}$$

Тогда поле ψ во всем пространстве определяется формулой ([2])

$$\psi(q) = -\int_s w(p) f(p, q)\, dp, \tag{4}$$

где

$$f(p, q) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik|p-q|}}{|p-q|}, \tag{5}$$

а dp — дифференциал площади поверхности s в точке p. Пусть $L_R^2(s)$ — совокупность функций $w(p)$, $p \in s$, для которых норма

$$\|w\| \equiv \left(\int_s |w(p)|^2 R(p)\, dp\right)^{1/2} < \infty. \tag{6}$$

Здесь $R(p) > 0$ при $p \in s$ — непрерывная на $\bar{s}$ функция, которая выбирается так, чтобы $w \in L_R^2(s)$ удовлетворяли требованиям, налагаемым на ток условием Майкснера. Таким образом, $R(p)$ должна обращаться в нуль на контуре L как ρ^α, где ρ — расстояние до L, а $0 < \alpha < 1$. $L_R^2(s)$ становится гильбертовым сепарабельным пространством, если ввести скалярное про-

* Индексами + и — обозначаются предельные значения величины при переходе на s со стороны, куда направлена нормаль n, и с противоположной соответственно.

** На L должны отсутствовать источники (стоки) энергии; т. е. поток мощности через поверхность «цилиндра» радиуса ρ, охватывающего L, должен стремиться к нулю вместе с ρ.

изведение ([3])

$$(w, v) = \int\limits_s w(p)\overline{v(p)}\,R(p)\,dp, \qquad w, v \in L_R^2(s); \tag{7}$$

черта — знак комплексного сопряжения.

Покажем, что при любом $w \in L_R^2(s)$, величина ψ / R, где ψ определена формулой (4), также включена в $L_R^2(s)$. Для этого напишем очевидное неравенство

$$\iint\limits_{s\,s} |w^2(p) f(p, q)| \frac{R(p)}{R(q)}\,dg\,dp \leqslant \sup_{p \in s} \int\limits_s \frac{|f(p, q)|}{R(q)}\,dq \cdot \|w\|^2.$$

Поскольку $R(q)$ обращается в нуль на L так, что правая часть неравенства конечна, то существует и двойной интеграл, стоящий слева. Отсюда следует, на основании теоремы Фубини, существование (почти всюду) и суммируемость (как функции q) интеграла

$$\int\limits_s |w^2(p) f(p, q)| \frac{R(p)}{R(q)}\,dp \in L(s). \tag{8}$$

Теперь остается применить неравенство Коши — Буняковского к выражению

$$\frac{|\psi(q)|^2}{R(q)} = \left|\int\limits_s \frac{w(p)}{\sqrt{R(q)}} f(p, q)\,dp\right|^2 \leqslant \int\limits_s |w^2(p) f(p, q)| \frac{R(p)}{R(q)}\,dp \int\limits_s \frac{|f(p, q)|}{R(p)}\,dp.$$

Правая часть этого неравенства суммируема на s, так как первый ее множитель суммируем (см. (8)), а второй ограничен. Поэтому суммируема и левая часть $|\psi|^2 / R \in L(s)$, а значит, $\psi / R \in L_R^2(s)$, и доказательство закончено.

Нам понадобится квадратичная лемма, которую легко получить, применив вторую теорему Грина к полям ψ и ψ_m, возбуждаемым токами $w \in L_R^2(s)$ и $w_m \in L_R^2(s)$, распределенными на s. Она имеет, учитывая (3), вид *

$$\int\limits_s \psi_m(p)\,w(p)\,dp = \int\limits_s \psi(p)\,w_m(p)\,dp. \tag{9}$$

Используя обозначение (7), ее можно записать как

$$(w, \bar{\psi}_m / R) = (w_m, \bar{\psi} / R). \tag{10}$$

Пусть $w_m \in L_R^2(s)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$,— полное относительно $L_R^2(s)$ семейство функций. Понимая теперь в (10) под ψ и w поле и ток исходной задачи, а под ψ_m — поле, возбуждаемое только что введенным током w_m, перепишем ее, учитывая (2), в виде

$$(w, \bar{\psi}_m / R) = a_m, \qquad a_m \equiv -(w_m, \bar{\psi}^0 / R); \tag{11}$$

здесь a_m — известные числа, а ψ_m определяется через w_m по формуле типа (4).

Покажем, что семейство $\bar{\psi}_m / R$ полно относительно $L_R^2(s)$, т. е. для функции $v \in L_R^2(s)$ из условий

$$(v, \bar{\psi}_m / R) = 0 \quad \text{при} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

следует $v = 0$ (почти всюду) на s.

* Поскольку ψ и ψ_m непрерывны при переходе через s, индексы $\pm$ у них опущены.

Действительно, вводя волновой потенциал

$$\Phi(q) = -\int_s v(p) f(p, q)\, dp, \qquad R^{-1}\Phi \in L_R^2(s), \tag{13}$$

и используя лемму типа (10), перепишем (12) как

$$(w_m, \overline{\Phi} / R) = 0, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Вследствие полноты w_m относительно $L_R{}^2(s)$, из (14) сразу следует, что $\Phi = 0$ на s (почти всюду). Поскольку $\Phi(q)$ — волновой потенциал простого слоя (см. (13)) с током $v \in L_R{}^2(s)$, то выполнены все условия теоремы единственности и из последнего равенства вытекает, что $\Phi(q) = 0$ во всем пространстве. Так как v равно скачку $\partial\Phi / \partial n$ при переходе через s (см. (3)), то из только что сказанного следует, что $v = 0$ на s (почти всюду), и полнота доказана.

Ортонормируем теперь семейство $\overline{\psi}_m / R$, т. е. построим функции

$$u_m = \sum_{n=0}^{m} a_n^{(m)} \frac{\overline{\psi}_n}{R}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

где постоянные $a_n^{(m)}$ находятся из условий $(u_m, u_n) = \delta_{mn}$ (см. [3]) и имеют вид

$$a_n^{(m)} = D_{mn}^{(m+1)} / \sqrt{D_m D_{m+1}};$$

здесь

$$D_0 = 1, \qquad D_{m+1} = \begin{vmatrix} d_{00} & \ldots & d_{0m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{m0} & \ldots & d_{mm} \end{vmatrix}, \qquad d_{mn} = \left(\frac{\overline{\psi}_m}{R}, \frac{\overline{\psi}_n}{R} \right).$$

$D_{in}^{(m+1)}$ — алгебраическое дополнение элемента d_{in} в определителе D_{m+1}.

Система u_m полна относительно $L_R{}^2(s)$, поскольку полна исходная система $\overline{\psi}_m / R$. Найдем коэффициенты Фурье искомого тока w по функциям u_m. Для этого умножим равенство (11) на $\overline{a_m^{(n)}}$ и просуммируем по m от нуля до n. Тогда, используя (15), получим

$$(w, u_n) = c_n, \qquad c_n \equiv \sum_{m=0}^{n} \overline{a_m^{(n)}}\, a_m. \tag{16}$$

Таким образом, c_n — искомые коэффициенты Фурье.

Как известно, ряд Фурье по полной, ортонормальной системе функций сходится (по норме $L_R{}^2(s)$) к функции из $L_R{}^2(s)$, для которой он составлен, поэтому

$$w(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u_n(q), \qquad q \in s. \tag{17}$$

Рассмотрим отрезок ряда

$$F_N(q) = -\sum_{n=0}^{N} c_n \int_s f(p, q)\, u_n(p)\, dp. \tag{18}$$

Учитывая (4) и неравенство Коши — Буняковского, найдем

$$|\psi(q) - F_N(q)| = \left| \left(w - \sum_{n=0}^{N} c_n u_n, \bar{f}/R \right) \right| \leqslant \left\| \frac{f}{R} \right\| \cdot \left\| w - \sum_{n=0}^{N} c_n u_n \right\|. \tag{19}$$

Пусть Q произвольная область пространства, не пересекающаяся с $\bar{s}$. Тогда первый множитель правой части (19) ограничен в Q, а второй стремится к нулю при $N \to \infty$ вследствие сходимости (17) по норме, поэтому $F_N \to \psi$ равномерно в Q. Следовательно,

$$\psi(q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n U_n(q), \tag{20}$$

где

$$U_n(q) = -\int\limits_{s} f(p, q) u_n(p)\, dp.$$

Равномерно сходящийся в Q ряд (20) и дает решение поставленной задачи.

Вернемся к определению весовой функции $R(q)$. Она стоит в знаменателе выражения (15) для u_n. Для улучшения сходимости ряда (17) (а значит, и (20)) нужно, чтобы каждый член ряда имел ту же особенность на L, что и ток w. Для этого $R(q)$ должна иметь на L нуль порядка $\alpha = 0{,}5$ ([1]).

Все полученные здесь результаты справедливы и для случая, когда s состоит из нескольких отдельных поверхностей Ляпунова с суммарным контуром L.

Поступило
16 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Х. Хенл, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, 1964. [2] Я. Н. Фельд, И. В. Сухаревский, Радиотехника и электроника, 11, № 7 (1966). [3] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, 1959.