Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 1

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

М. МЕРЕДОВ

О ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 IV 1972)

В работе [1] А. М. Нахушевым была изучена задача Дарбу как для вырождающихся, так и для общих гиперболических уравнений второго порядка на плоскости при довольно общих предположениях на коэффициенты уравнения, а в работе [2] он рассматривал многомерные аналоги задачи Дарбу, которые являются исключительными случаями задачи, исследованной С. Л. Соболевым [3] для многомерного волнового уравнения. В настоящей работе изучается некоторый аналог задачи Дарбу для одного класса гиперболических уравнений четвертого порядка.

Пусть дифференциальный оператор K определяется формулой

$$K \equiv \sum_{i=1}^{m} k_i(t)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где $k_i(t)$ — возрастающие и дважды дифференцируемые функции при $t \leqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Здесь и ниже предположим, что $k_i(t) < 0$ при $t < 0$ и могут обращаться в нуль при $t = 0$, причем если $k_i(0) = 0$, то $k_i'(0) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Пусть G — конечная односвязная область $(m+1)$-мерного эвклидова пространства E_{m+1} точек $(x, t) = (x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$, ограниченная снизу характеристическим конусом S_1 оператора K с вершиной, направленной в отрицательную сторону оси Ot и расположенной в полупространстве $t < 0$, и сверху — частью гиперплоскости $t = 0$, отсекаемой конусом S_1; ее обозначим через S_0.

В области G рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K^2u + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} k_i(t)A^j u_{x_ix_ix_j} + \sum_{i=1}^{m} A^i u_{x_itt} + \sum_{i=1}^{m} A^0 k_i(t) u_{x_ix_it} + A^0 u_{ttt} + L_1 u = f(x, t) \tag{2}$$

с коэффициентами $A^i = A^i(x, t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, из класса $C^2(\overline{G})$, с правой частью $f = f(x, t)$ из пространства $L_2(G)$; L_1 — линейное дифференциальное выражение второго порядка с коэффициентами из класса $C^2(\overline{G})$.

Рассмотрим для уравнения (2) следующую задачу.

Задача Д. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (2) в G, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S_1} = 0, \tag{3$_1$}$$

$$u|_{S_0} = 0, \quad \partial u/\partial t|_{S_0} = 0. \tag{3$_2$}$$

В дальнейшем нам будет необходима следующая

Лемма 1. *Если коэффициенты оператора*

$$K_1 u \equiv Ku + \sum_{i=1}^{m} \alpha^i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \beta(x, t) \frac{\partial u}{\partial t} + \gamma(x, t) u \qquad (4)$$

из класса $C^1(\overline{G})$, тогда для любой функции $u \in C^1(\overline{G}) \cap C^2(G)$, удовлетворяющей краевому условию (3_1), справедливо неравенство

$$\| K_1 u \|_0^2 \geqslant c_1 \| u \|_1^2 + c_2 \int_{S_0} [u^2(x, 0) + u_t^2(x, 0)]\, ds, \qquad (5)$$

где $\|\cdot\|_l$ — норма в пространстве Соболева $W_2^l(G)$, c_j — здесь и ниже положительные постоянные, не зависящие от функции $u(x, t)$.

Доказательство. Обозначим через C_L множество функций $u(x, t)$ из класса $C^1(\overline{G}) \cap C^2(G)$, удовлетворяющих краевому условию (3_1).

Введем оператор [1]

$$K_{1\mu} v \equiv Kv + \sum_{i=1}^{m} \alpha^i(x, t) v_{x_i} + \beta_\mu(x, t) v_t + \gamma_\mu(x, t) v,$$

где $\beta_\mu = \beta(x, t) + 2\mu$, $\gamma_\mu = \gamma(x, t) + \mu \cdot \beta(x, t) + \mu^2$, $\mu = \text{const} > 0$.

Легко проверить, что если $u = \exp(\mu t) \cdot v$ и $u \in C_L$, то $K_1 u = \exp(\mu t) \cdot K_{1\mu} v$ и $v \in C_L$.

Для любой функции $a = a(t) \in C^1(\overline{G})$ и $v \in C_L$ справедливо тождество

$$2(a \cdot v_t, K_{1\mu} v)_0 = \int_G \left\{ a_t \left(\sum_{i=1}^{m} k_i v_{x_i}^2 - v_t^2 \right) + a \sum_{i=1}^{m} k_i' v_{x_i}^2 + 2a\beta_\mu v_t^2 + \right.$$
$$\left. + 2a \sum_{i=1}^{m} \alpha^i v_{x_i} \cdot v_t \right\} dG - \int_G (a\gamma_\mu)_t v^2\, dG + \int_{\partial G} a\gamma_\mu v^2 n_0\, ds +$$
$$+ \int_{\partial G} \left\{ 2a \sum_{i=1}^{m} k_i v_{x_i} v_t n_i + a v_t^2 n_0 - a \sum_{i=1}^{m} k_i v_{x_i}^2 n_0 \right\} ds = \sum_{j=1}^{4} J_j, \qquad (6)$$

где $n_i = \cos(x_i, n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $n_0 = \cos(t, n)$ — направляющие косинусы внешней нормали к ∂G.

Поскольку на S_1 $v = 0$, $v_{x_i} = n_i v_n$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $v_t = n_0 v_n$, $\sum_{=1}^{m} k_i n_i^2 + n_0^2 = 0$, то нетрудно убедиться, что $J_3 = 0$ и $J_4 = 0$ на S_1.

Предположим, что $a = \exp(-\lambda t)$, где $\lambda = \text{const} > 0$. Из [6] и простого неравенства $2\alpha^i v_{x_i} v_t \geqslant -\varepsilon v_{x_i}^2 - \frac{(\alpha^i)^2}{\varepsilon} v_t^2$, справедливого для любого $\varepsilon > 0$, имеем

$$\int_G a \left\{ \left[2\mu + \lambda + \beta(x, t) - \sum_{i=1}^{m} \frac{(\alpha^i)^2}{\varepsilon} \right] v_t^2 + \sum_{i=1}^{m} (k_i' - \lambda k_i - \varepsilon) v_{x_i}^2 + \right.$$
$$\left. + [\lambda(\mu^2 + \mu\beta + \gamma) - \gamma_t - \mu\beta_t] v^2 \right\} dG +$$
$$+ \int_{S_0} \left[v_t^2(x, 0) + (\mu^2 + \mu\beta + \gamma) v^2(x, 0) - \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{m} k_i(0) v_{x_i}^2 \right] ds \leqslant | 2(av_t, K_{1\mu} v)_0 |. \qquad (7)$$

Так как либо $k_i(0) < 0$, либо $k_i'(0) > 0$, тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что справедливо неравенство

$$k_i'(0) - \lambda k_i - \varepsilon > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Поэтому существуют положительные числа $\lambda > 0$ и $\mu > 0$ такие, что

$$k_i'(t) - \lambda k_i(t) - \varepsilon > 0, \quad 2\mu + \lambda + \beta - \sum_{i=1}^{m} \frac{(\alpha^i)^2}{\varepsilon} > 0,$$

$$\lambda(\mu^2 + \mu\beta + \gamma) - \gamma_t - \mu\beta_t > 0 \quad \forall (x, t) \in \overline{G}. \tag{8}$$

Принимая во внимание (8) и (7), получаем неравенство

$$\| K_{1\mu} v \|_0^2 \geqslant c_1 \| v \|_1^2 + c_2 \int_{S_0} [v^2(x, 0) + v_t^2(x, 0)]\, ds \quad \forall v \in C_L.$$

Отсюда следует справедливость леммы 1.

В частности, при $\alpha^i = \beta = \gamma = 0$ из неравенства (5) имеем

$$\| Ku \|_0^2 \geqslant c_1 \| u \|_1^2 + c_2 \int_{S_0} [u^2(x, 0) + u_t^2(x, 0)]\, ds \quad \forall u \in C_L.$$

Обозначим через $W(D)$ множество функций $u(x, t)$ из класса $W = C^3(\overline{G}) \cap C^4(G)$, для которых $Lu \in L_2(G)$ и соблюдены краевые условия (3_j), $j = 1, 2$. Очевидно, что $W(D) \subset C_L$, следовательно, для любой функции из $W(D)$ справедливо неравенство

$$\| Ku \|_0^2 \geqslant c \| u \|_1^2 \quad \forall u \in W(D). \tag{9}$$

Для функций $u(x, t)$, принадлежащих $W(D)$, определим новую норму формулой

$$|||u||| = \sqrt{\| u \|_0^2 + \| Ku \|_0^2}. \tag{10}$$

Легко проверить, что при так определенной норме $W(D)$ становится линейным нормированным пространством. Если оно неполно, то, пополнив его обычным способом, получим полное нормированное пространство. Обозначим его через H. Так как $W(D)$ плотно в H, то пополнение $W(D)$ до полного нормированного пространства по норме (10) порождает расширение оператора K.

Легко заметить, что это расширение оператора K совпадает с замыканием его. Расширенный оператор снова обозначим через K.

Для произвольных $u, v \in H$ определим скалярное произведение формулой

$$[u, v] = (u, v)_0 + (Ku, Kv)_0. \tag{11}$$

Тогда $|||u|||^2 = [u, u]$. Так как $[u, v]$ полностью удовлетворяет аксиомам скалярного произведения, то H можно рассматривать как действительное гильбертово пространство.

Как следует из (9) и (10), справедливы следующие включения:

$$W(D) \subset H \subset W_2^1(G) \subset L_2(G).$$

Пусть u и v из множества $W(D)$, тогда интегрированием по частям, в силу краевых условий (3_j), получаем

$$(Lu, v)_0 = (Ku, Kv)_0 + B_1(u, v), \tag{12}$$

где

$$B_1(u, v) = -(Ku, lv)_0 + B_2(u, v),$$

$$l = \sum_{i=1}^{m} A^i \frac{\partial}{\partial x_i} + A^0 \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} A_{x_i}^i + A_t^0, \tag{13}$$

$B_2(u, v)$ — билинейная форма, состоящая из дифференциальных выражений не выше первого порядка.

Если теперь определить билинейную форму $B(u, v)$, соответствующую дифференциальному оператору L, формулой

$$B(u,v) = (Ku, Kv)_0 + B_1(u,v), \tag{14}$$

то из (2) и (12) следует, что для любых $u, v \in W(D)$ следующие два равенства эквивалентны:

$$Lu = f, \quad B(u, v) = (f, v)_0.$$

Определение. Обобщенным решением задачи Д назовем любую функцию $u \in H$, если $B(u, v) = (f, v)_0 \quad \forall v \in W(D)$.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (2) *таковы, что для любых $u \in H$ справедливо неравенство*

$$B_1(u, u) \geqslant 0; \tag{15}$$

тогда для любой функции f из $L_2(G)$ существует и притом единственное обобщенное решение задачи Д из пространства H.

Доказательство. Поскольку билинейная форма $B_2(u, v)$ состоит из дифференциальных выражений не выше первого порядка с ограниченными коэффициентами, то в силу (9) и (10) имеем

$$|B_1(u, v)| \leqslant c\, |||u||| \cdot |||v||| \quad \forall u, v \in H, \quad c > 0.$$

Отсюда следует неравенство

$$|B(u, v)| \leqslant c_1 |||u||| \cdot |||v||| \quad \forall u, v \in H, \quad c_1 = 1 + c. \tag{16}$$

В силу условия (15) получаем

$$B(u, u) \geqslant c_2 |||u|||^2, \quad c_2 > 0. \tag{17}$$

Теперь доказательство существования обобщенного решения задачи Д и его единственность проводится по стандартной схеме (см., например, [4]).

Замечание. Как следует из леммы 1, если в уравнении (2) главную часть K^2u заменить оператором $K_1^*(K_1u)$, где K_1 — оператор из леммы 1, а K_1^* — оператор, формально сопряженный с K_1, то можно показать, что все полученные результаты останутся справедливыми.

Туркменский государственный университет
им. А. М. Горького
Ашхабад

Поступило
24 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Нахушев, Дифференциальные уравнения, **7**, 1 (1971). [2] А. И. Нахушев, ДАН, **194**, № 1 (1970). [3] С. Л. Соболев, Математич. сборн., **11** (53), 3 (1942). [4] М. Нагумо, Лекции по современной теории уравнений в частных производных, М., 1967.