

Ю. В. ПЕДАН

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМ О РАЗЛОЖЕНИИ ФРУАССАРА ДЛЯ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 17 IV 1972)

1°. Будем использовать следующие обозначения: Y — область пространства $C^2(x_1, x_2)$ двух независимых комплексных переменных; $S' = \bigcup_{j=1}^l S_j$ — разложение аналитического в области Y множества S' комплексной размерности 1 в объединение неприводимых в Y компонент S_j ; S'^0 — множество нерегулярных точек S' (оно состоит из изолированных точек); Q — множество, состоящее из точек $Q_i \in S'^0$, в достаточно малой окрестности которых S' разлагается на $v_i > 1$ неприводимых компонент; Δ_j^2 — достаточно малый бицилиндр, связанный с некоторой системой координат, с центром в точке $P_j \in S'^0$ такой, что для всех неприводимых ростков, порожденных S' в точке P_j , выполняется теорема о локальном описании ((³), стр. 84–86); $A_j = \partial \Delta_j^2 \cap S'$ состоит из $v_j \geq 1$ компонент связности A_j^k , которые представляют собой дифференцируемые вложения окрестности в S' и являются пересечением с $\partial \Delta_j^2$ замыканий неприводимых компонент аналитического множества $S' \cap \Delta_j^2$; $\tilde{A}_j$ получается выбрасыванием из A_j любой его компоненты связности; $A = \bigcup_{P_j} A_j$, $\tilde{A} = \bigcup_{P_j} \tilde{A}_j$; $H = \oplus H_p$ — сингулярная кубическая теория гомологий с коэффициентами в поле комплексных чисел; $H^* = \oplus H^p$ — когомологии де Рама комплексного аналитического многообразия; $m(S') = \bigcup_{j=1}^l m(S_j)$ — абстрактная риманова поверхность, соответствующая аналитическому множеству S' в том смысле, что существует отображение $\varphi: m(S') \rightarrow S'$, бигоморфное на $\varphi^{-1}(S - S'^0)$. $m(S_j)$ попарно не пересекаются и, если S_j неприводимо в каждой своей точке, то $m(S_j) = S_j$.

2°. Основным результатом работы является

Теорема 1. Пусть $\bar{\omega}: H(Y) \rightarrow 0$, тогда $H_p(Y - S') = H_p(Y)$, $p \neq 1, 2$;

$$H_2(Y - S') = \bigoplus_{j=1}^l \delta H_1(m(S_j)) \oplus \delta H_1(\tilde{A}) \oplus H_2(Y);$$

$$H_1(Y - S') = \bigoplus_{j=1}^l \delta H_0(S_j) \oplus H_1(Y).$$

Смысл гомоморфизмов групп гомологий $\bar{\omega}$, δ будет пояснен ниже; δ — мономорфизм.

Доказательство теоремы 1 вытекает из точной тройки

$$\begin{array}{ccc} & \xleftarrow{\bar{\omega}} & H(Y) \xleftarrow{i} \\ & \downarrow & \downarrow \\ \bigoplus_{j=1}^l H(m(S_j)) \oplus H_1(\tilde{A}) & \xrightarrow{\delta} & H(Y - S'); \end{array} \quad (1)$$

$\dim i = 0, \quad \dim \bar{\omega} = -2, \quad \dim \delta = 1.$

Условие $\bar{\omega}: H(Y) \rightarrow 0$ позволяет расщепить тройку (1) на короткие точные последовательности, из которых непосредственно следует теорема 1.

Тройка (1) получается прямым вычитанием точной последовательности

$$0 \rightarrow H(Y - S'^0) \oplus H(Y) \xrightarrow{\bar{\omega}'} H_1(A) \oplus H_1(\bar{A}) \rightarrow 0 \quad (2)$$

из точной тройки

$$\begin{array}{c} \bar{\omega}' \quad \quad \quad i' \\ \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\ H(S' - S'^0) \xrightarrow{\delta'} H(Y - S'); \end{array} \quad (3)$$

$$\dim i' = 0, \quad \dim \bar{\omega}' = -2, \quad \dim \delta' = 1.$$

Тройка (3) является точной тройкой Лере $i, \bar{\omega}, \delta$ ⁽¹⁾, примененной к комплексному аналитическому многообразию $Y - S'^0$ и его подмногообразию $S' - S'^0$.

Теорема 1 позволяет находить гомологии дополнения до аналитического множества при меньших ограничениях, чем в теоремах о разложении Фруассара (см. ⁽²⁾, дополнение 1), но только для $n = 2$.

3°. З а м е ч а н и е 1. Приведем ряд случаев, когда условие $\bar{\omega}: H(Y) \rightarrow 0$ выполняется. 1) У каждого класса гомологий Y есть представитель, не пересекающийся с S' ; 2) если $H_p(Y) = 0$, $p \neq 0, 1$, например, выпуклые области, области Рунге и области, являющиеся стягиваемыми топологическими пространствами.

З а м е ч а н и е 2. Если S' целиком состоит из регулярных точек, то тройка (1) совпадает с тройкой Лере $i, \bar{\omega}, \delta$.

З а м е ч а н и е 3. Имеет место равенство $\delta H_1(\bar{A}_j) = H_2(\Delta_j^2 - S')$. База $H_2(\Delta_j^2 - S')$ состоит из $v_j - 1$ циклов, которые получаются взятием оператора кограницы δ_e от компонент связности $\bar{A}_j$.

З а м е ч а н и е 4. У каждого класса гомологий $\bigoplus_{j=1}^l H_1(m(S_j))$ если представитель, лежащий на $S' - S'^0$, и можно считать, что гомоморфизм δ на $\bigoplus_{j=1}^l H_1(m(S_j))$ порожден оператором взятия кограницы δ_e .

З а м е ч а н и е 5. Пусть группы $H_2(Y), \bigoplus_{j=1}^l H_1(m(S_j)), H_1(\bar{A})$ имеют соответственно базы $\gamma_1, \dots, \gamma_{\alpha_1}; \beta_1, \dots, \beta_{\alpha_2}$ и $\beta_1, \dots, \beta_{\alpha_3}$ и выполняется условие теоремы 1, тогда группа $H_2(Y - S')$ имеет базу $\gamma_1, \dots, \gamma_{\alpha_1}; \delta_e \beta_1, \dots, \delta_e \beta_{\alpha_2}; \delta_e \beta_1, \dots, \delta_e \beta_{\alpha_3}$. Так как циклы β_i, β_j можно выбрать лежащими на регулярных точках S' , то к ним применима простая формула вычетов Лере ⁽¹⁾. Описанная в замечании 5 ситуация имеет место, например, когда $Y = C^2(x_1, x_2)$, S' — нули полинома. Описание группы $H_2(C^2 - S')$ в этом случае сделано ранее А. Южаковым в ⁽⁴⁾ *.

З а м е ч а н и е 6. Полученные здесь результаты можно двойственным образом распространить на когомологии де Рама. Ограничимся приведением короткой точной последовательности, дающей информацию о $H^2(Y - S')$:

$$0 \rightarrow H^2(Y) \xrightarrow{i^*} H^2(Y - S') \xrightarrow{\delta^*} \bar{H}^1(m(S')) \rightarrow 0, \quad (4)$$

где $\bar{H}^1(m(S'))$ — когомологии де Рама мероморфных на $m(S')$ дифференциалов с полюсами в точках $\varphi^{-1}(Q)$, причем в одной из точек $\varphi^{-1}(Q_j)$ вычет всех дифференциалов должен равняться нулю. Гомоморфизм δ^* порожден операцией res ⁽¹⁾ около регулярных точек S' .

Ростовский государственный университет

Поступило
11 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Ж. Л е р е, Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии, ИЛ, 1961. ² Р. Х у а, В. Т е п л и ц, Гомология и фейнмановские интегралы, М., 1969. ³ М. Э р в е, Функции многих комплексных переменных, М., 1965. ⁴ А. Ю ж а к о в, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст., 110, математика в. 7 (1962).

* Как любезно сообщил А. Южаков, два года назад им получено описание этой же группы $H_2(C^2 - S')$, использующее оператор взятия кограницы δ_e , которое еще не опубликовано.