

УДК 539.374

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Член-корреспондент АН СССР А. А. ИЛЬЮШИН, Х. МОВЛЯНКУЛОВ,
Р. М. СУНЧАЛИЕВ, А. Н. ФИЛАТОВ

**О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ
ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЯЗКО-УПРУГОСТИ**

1. Нелинейные уравнения теории вязко-упругости. Запишем общие уравнения физически нелинейной теории вязко-упругости в виде

$$\rho(\ddot{u}_i - F_i) = (\bar{\sigma}_{,i} + \bar{s}_{ij,j}) + (\hat{\sigma}_{,i} + \hat{s}_{ij,j}), \quad (1)$$

где ⁽¹⁾

$$\bar{\sigma} = \int_0^t K(t-\tau) d\theta(x, \tau), \quad \bar{s}_{ij} = \int_0^t R(t-\tau) de_{ij}(x, \tau),$$

$$\hat{\sigma} = \int_0^t K_*(t-\tau, \lambda\theta(x, \tau), z(x, \tau, \tau)) \theta(x, \tau) d\tau, \quad (2)$$

$$\hat{s}_{ij} = - \int_0^t R_*(t-\tau, \lambda\theta(x, \tau), z(x, \tau, \tau)) e_{ij}(x, \tau) d\tau,$$

$$z(x, \tau, \tau) = e_{mn}(x, \tau) e_{mn}(x, \tau), \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - 1/3 \theta \delta_{ij},$$

$$\theta = \text{div } u, \quad 2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}, \quad u = (u_1, u_2, u_3),$$

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3.$$

В общем случае ядра K_* , R_* могут зависеть также и от $\lambda\theta(x, t)$, $z(x, t, \tau)$, $z(x, t, t)$ ⁽¹⁾.

Можно показать, что уравнения (1) с учетом соотношений (2) после некоторых преобразований могут быть записаны в форме

$$\rho \ddot{u} = \rho F + (\mu - \mu^*) \Delta u + (\lambda - \lambda^*) \text{grad div } u + (\mu - \mu^*) \text{grad div } u +$$

$$+ \int_0^t \{ 1/2 R_* \Delta u + R_{*1} \text{grad div } u + R_{*2} [\text{div } \theta \mathcal{E} - \theta \Delta u - \theta \text{grad } \theta] + Q \} d\tau. \quad (3)$$

Здесь $\mathcal{E}$ — тензор деформаций.

$$Q_i = \left\{ \varepsilon_{ij} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} (1/3 R_* + K_*) \theta \delta_{ij} \right\} \varepsilon_{mn} (u_{m,ni} + u_{n,mj}),$$

$$R_{*1} = 1/6 R_* - \partial(\theta K_*) / \partial \theta - 1/3 \theta \partial R_* / \partial \theta,$$

$$R_{*2} = \partial R_* / \partial \theta - 2/3 \theta \partial R_* / \partial z,$$

$$\lambda^* \varphi = - \int_0^t [K'(t-\tau) - 1/3 R'(t-\tau)] \varphi d\tau, \quad \mu = 1/2 R(0),$$

$$\mu^* \varphi = - 1/2 \int_0^t R'(t-\tau) \varphi d\tau, \quad \lambda = K(0) - 1/3 R(0).$$

Заметим, что если R_* и K_* не зависят от z , то $Q = 0$ и уравнения (3) значительно упрощаются. Если в (3) отбросить инерционный член $\rho \ddot{u}$, то получим уравнения, описывающие квазистатические задачи теории вязко-упругости.

В случае несжимаемого материала $\lambda = \infty$, при этом возникает дополнительное уравнение $\theta = \text{div } u = 0$ и в (3) появляется новая неизвестная функция $\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda \theta$, $\lambda \rightarrow \infty$, $\theta \rightarrow 0$.

Характерная особенность уравнений (3) состоит в том, что в них явно выделены линейные и нелинейные слагаемые. Эта форма удобна при решении конкретных задач нелинейной теории вязко-упругости. К уравнениям (3), следует добавить соответствующие начальные и краевые условия.

Для вязко-упругих тел, содержащих большое количество упругих наполнений, в соотношениях (2) естественно возникают малые параметры за счет того, что выполняются неравенства

$$\left| \int_0^t \theta K_* d\tau \right| \ll K(0) \max_{0 \leq \tau \leq t} |\theta(\tau)|, \quad \left| \int_0^t R_* e_{ij} d\tau \right| \ll R(0) \max_{0 \leq \tau \leq t} \sqrt{z(\tau, \tau)}.$$

Ниже мы будем считать систему (3) приведенной к системе обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений по t , например методом прямых, методом Бубнова — Галеркина или другими известными методами.

2. Об одной схеме усреднения интегро-дифференциальных уравнений. Для исследования динамических задач нелинейной теории вязко-упругости, описываемых уравнениями (3), можно воспользоваться методами усреднения интегро-дифференциальных уравнений, изложенными в (2-4) или применять следующую схему усреднения. Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида ($\varepsilon > 0$ — малый параметр, x — n -мерный вектор)

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f\left(t, x(t), \int_0^t \varphi(t, s, x(t), x(s)) ds\right). \quad (4)$$

Пусть существуют пределы

$$\varphi_0(t, x) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T ds \int_0^s \varphi(t, \sigma, x, x) d\sigma, \\ f_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f\left(t, x, \int_0^t \varphi(t, s, x, x) ds - \varphi_0(t, x) + \varphi_0(t, x(0))\right) dt. \quad (5)$$

Тогда системе (4) поставим в соответствие систему усредненных уравнений $\dot{\xi} = \varepsilon f_0(\xi)$, $\xi(0) = x(0)$.

Теорема 1. Пусть в области $Q\{t \geq 0, s \geq 0, x \in D, z \in D, y \in E_n\}$ выполняются следующие условия:

1) Функции $f(t, x, y)$, $\varphi(t, s, z, x)$, $\psi(t, s, z, x) = \partial \varphi / \partial x$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица: $f(t, x, y) \in \text{Lip}_{x,y}(\lambda, Q)$, $\varphi(t, s, z, x) \in \text{Lip}_{x,z}(\mu(t, s), Q)$, $\psi(t, s, z, x) \in \text{Lip}_{x,z}(\nu(t, s), Q)$;

$$2) \int_0^t \mu(t, s) ds \leq C_1, \quad \int_0^t \nu(t, s) ds \leq C_2;$$

3) функции $f_0(x)$, $\varphi_0(t, x)$, $\partial \varphi_0 / \partial x$ непрерывны и удовлетворяют условию Липшица по x , причем предполагается, что

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T ds \int_0^s \frac{\partial \varphi(t, \sigma, x, x)}{\partial x} d\sigma; \quad (6)$$

4) равномерно относительно $t \geq 0$ существуют пределы (5) и (6), причем решение $\xi(t)$ усредненной системы определено для всех $t \geq 0$, лежит в области D с некоторой ρ -окрестностью и вдоль этого решения функции

$$f_0(\xi), \quad \partial \varphi_0(t, \xi) / \partial \xi, \quad \int_0^s \frac{\partial \varphi(t, \sigma, \xi(t), \xi(s))}{\partial \xi(s)} d\sigma$$

ограничены по абсолютной величине.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ можно указать такое ε_0 , что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на отрезке $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство

$$|x(t) - \xi(t)| < \eta.$$

3. Об усреднении интегральных уравнений. Для исследования квазистатических задач теории вязко-упругости можно воспользоваться следующей схемой усреднения интегральных уравнений.

Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений вида

$$u(t) = f\left(t, u(t), \int_0^t \varphi(t, s, u(s)) ds\right) + \varepsilon F\left(t, u(t), \int_0^t \psi(t, s, u(s)) ds\right). \quad (7)$$

Пусть существует среднее

$$\psi_0(t, u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi(t, s, u) ds.$$

Тогда системе (7) поставим в соответствие систему усредненных уравнений

$$v(t) = f\left(t, v(t), \int_0^t \varphi(t, s, v(s)) ds\right) + \varepsilon F\left(t, v(t), \int_0^t \psi_0(t, v(s)) ds\right). \quad (8)$$

Можно показать, следуя ⁽⁴⁾, что при определенных условиях и достаточно малом ε на отрезке $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ решения систем (7) и (8) как угодно близки.

4. Метод «замораживания». Интегральные уравнения, возникающие в квазистатических задачах теории вязко-упругости, можно исследовать также с помощью следующего весьма простого приема. Рассмотрим систему интегральных уравнений вида ($\varepsilon > 0$ — малый параметр)

$$u(t) = \varepsilon F\left(t, u(t), \int_0^t \varphi(t, s, u(s)) ds\right). \quad (9)$$

Наряду с этой системой рассмотрим систему функциональных уравнений

$$v(t) = \varepsilon F\left(t, v(t), \int_0^t \varphi(t, s, v(t)) ds\right), \quad (10)$$

получающуюся формально из (9), если в (9) в интегральном члене u фиксировать («заморозить») в момент t .

Теорема 2. Пусть функции $F(t, u, y)$ и $\varphi(t, s, u)$ определены и непрерывны в области $Q\{t \geq 0, s \geq 0, u \in D \subset E_n, y \in E_n\}$, и пусть в этой области

$$1) F(t, u, y) \in \text{Lip}_{u, y}(\lambda, Q), \quad \varphi(t, s, u) \in \text{Lip}_u(\mu(t, s), Q), \quad \mu_0(t, s) = \sup_{s \leq \sigma \leq t} \mu(\sigma, s), \quad \frac{1}{t} \int_0^t \mu_0(t, s) ds \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty, \quad 0 < \lambda < 1;$$

2) система (9) имеет единственное непрерывное решение, а система (10) имеет единственное непрерывное и ограниченное для всех $t \geq 0$ решение $v = v(t)$, лежащее с некоторой ρ -окрестностью в области D .

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ можно указать такое ε_0 , что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ на отрезке $0 \leq t \leq L\varepsilon^{-1}$ будет выполняться неравенство

$$|u(t) - v(t)| < \eta.$$

Институт кибернетики с Вычислительным центром
Академии наук УзССР
Ташкент

Поступило
24 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. А. Ильющин, П. М. Огибалов, Механика полимеров, № 2 (1966).
² А. Н. Филатов, В сборн. Исследования по аналитической механике, Ташкент, 1965. ³ А. Н. Филатов, Усреднение в системах дифференциальных, интегро-дифференциальных и интегральных уравнений, Ташкент, 1967. ⁴ А. Н. Филатов, Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях, Ташкент, 1971.