Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 1

УДК 513.836

МАТЕМАТИКА

Х. Н. ИНАСАРИДЗЕ

ТОЧНАЯ ГОМОЛОГИЯ И ЗАЦЕПЛЕНИЕ ДЛЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ СТИНРОДА

(Представлено академиком П. С. Александровым 29 X 1971)

В заметке приводится построение на категории компактных пар точной теории гомологии при помощи цепей, определенных на конечных открытых покрытиях пространства, с коэффициентами в комплексах копредпучков модулей [1]. Далее, нам удалось получить зацепление для двойственности Стинрода [2] благодаря нашей конструкции групп гомологии Стинрода. Желательность установить, насколько можно интерпретировать двойственность Стинрода в зацеплениях, как это возможно для двойственности Александера, была высказана П. С. Александровым [3].

Пусть $\mathfrak{L}_m = L_0 \xrightarrow{\tau_0} L_1 \xrightarrow{\tau_1} \ldots \to L_{m-1} \xrightarrow{\tau_{m-1}} L_m$ — конечный комплекс абелевых групп, либо дискретных, либо компактных и $\mathfrak{L}_m{}^*$ — комплекс, состоящий из двойственных групп и сопряженных гомоморфизмов комплекса $\mathfrak{L}_m$.

Пусть K^{n+1} — $(n+1)$-мерный ориентированный полиэдр, гомеоморфный $(n+1)$-мерному многообразию, r-мерная цепь $(r \geqslant 0)$ полиэдра K^{n+1} с коэффициентами в комплексе $\mathfrak{L}_m$ является элементом группы $[\operatorname{Hom}(C^*(K^{n+1}, Z), \mathfrak{L}_m)]_{-r}$, т. е. имеет вид

$$\xi_r = \sum_\alpha l_0^\alpha \sigma_\alpha^r + \sum_\beta l_1^\beta \sigma_\beta^{r+1} + \ldots + \sum_\gamma l_i^\gamma \sigma_\gamma^{r+i} + \ldots + \sum_\eta l_m^\eta \sigma_\eta^{r+m},$$

где $\sigma_\gamma{}^{r+i}$ — $(r+i)$-мерный симплекс полиэдра K^{n+1} и $l_i^\gamma \in L_i$, причем $\sum\limits_\gamma l_i^\gamma \sigma_\gamma{}^{\gamma+i} = 0$, если $r+i > n+1$. r-Мерная коцепь $(r \geqslant 0)$ полиэдра K^{n+1} с коэффициентами в комплексе $\mathfrak{L}_m{}^*$ является элементом группы $[\operatorname{Hom}(C_*(K^{n+1}, Z), \mathfrak{L}_m{}^*)]_r$, т. е. имеет вид

$$x_r = \sum_\eta \bar{l}_{-m}^\eta \sigma_\eta^{r+m} + \ldots + \sum_\gamma \bar{l}_{-i}^\gamma \sigma_\gamma^{r+i} + \ldots + \sum_\beta \bar{l}_{-1}^\beta \sigma_\beta^{r+1} + \sum_\alpha \bar{l}_0^\alpha \sigma_\alpha^\eta,$$

где $\bar{l}_{-i}{}^\gamma \in L_i^*$, причем $\sum\limits_\gamma \bar{l}_{-i}{}^{-\gamma} \sigma_\gamma{}^{r+i} = 0$, если $r+i > n+1$.

Барицентрической звездной цепью r-мерной коцепи x_r называется следующая $(n+1-r)$-мерная цепь с коэффициентами в $\mathfrak{L}_m{}^*$:

$$\mathfrak{B}(x_r) = A_m \sum_\eta \bar{l}_{-m}^\eta \sigma_\eta^{r+m} + \ldots + A_i \sum_\gamma \bar{l}_{-i}^\gamma \sigma_\gamma^{r+i} + \ldots + A_1 \sum_\beta \bar{l}_{-1}^\beta \sigma_\beta^{r+1} + A_0 \sum_\alpha \bar{l}_0^\alpha \sigma_\alpha^r,$$

где $a_i\mathfrak{B} = A_i$, $a_i = 1$, если i четно и $a_i = (-1)^r$, если i нечетно.

Определим индекс пересечения цепи ξ_r и барицентрической звездной цепи $x^*{}_{n+1-r} = \mathfrak{B}(x^r)$:

$$I(\xi_r, x^*_{n+1-r}) = (\xi_r, x_r) = \sum_i \sum_\gamma l_i^\gamma \bar{l}_{-i}^\gamma. \tag{1}$$

Пусть x_{n-r} и y_r — два непересекающихся цикла многообразия K^{n+1}, причем первый взят с коэффициентами в $\mathfrak{L}_m{}^*$, а второй — с коэффициентами в $\mathfrak{L}_m$. Предположим, что каждый из них гомологичен нулю в K^{n+1}. Если $x_{n-r} = \partial u_{n+1-r}$, то определим коэффициент зацепления циклов y_r и x_{n-r}

$$\vee(y_r, x_{n-r}) = I(y_r, u_{n+1-r}). \tag{2}$$

Приведем теперь построение точной теории гомологии на категории $\mathfrak{A}$ компактных пар и непрерывных отображений, которая на подкатегории метрических пар удовлетворяет аксиоматике Милнора ([4]) теории гомологии Стинрода. Эта аксиоматика содержит все аксиомы Эйленберга — Стинрода и добавляются следующие две аксиомы:

8) *инвариантность для относительных гомеоморфизмов*,

9) *если X является объединением счетного числа компактных подмножеств $X_0, X_1, \ldots, X_q, \ldots$, диаметр которых стремится к нулю, причем $X_i \cap X_j = b$ для $i \neq j$, где b — точка из X, то $H_n(X, b)$ естественно изоморфна $\prod_q H_n(X_q, b)$.*

Теорию гомологии, удовлетворяющую этой аксиоматике Милнора, за исключением аксиомы размерности, естественно назвать обобщенной теорией гомологии Стинрода.

Покрытием пары $(X, A) \in \mathfrak{A}$ называется пара (U, V) такая, что U — конечное мультипликативное открытое покрытие X, а V — мультипликативное подмножество U, удовлетворяющее условию: $\bigcup_{v \in V} v \supset A$, причем для $u \in U$, $v \in V$, если $u \cap v = \phi$, то $u \cap v \in V$. В множество $\mathrm{Cov}(X, A)$ всех таких покрытий введем упорядоченность следующим образом: $(U_\beta, V_\beta) \gg (U_\alpha, V_\alpha)$, если U_β и V_β вписаны соответственно в U_α и V_α, причем для $u_\alpha \in U_\alpha$, $u_\beta \in U_\beta$, когда $u_\alpha \cap u_\beta \neq \phi$, то $u_\alpha \cap u_\beta \in U_\beta$. Для $\mathrm{Cov}(X, \phi)$ эту вписанность рассмотрел П. С. Александров ([5]) и назвал ее точной вписанностью. Если $(U_\beta, V_\beta) \gg (U_\alpha, V_\alpha)$, то имеем симплициальное отображение $p_\beta^\alpha\colon (K_\beta, L_\beta) \to (K_\alpha, L_\alpha)$ нервов этих покрытий, где $p_\beta^\alpha(u_\beta) = \bigcap_{u_\alpha \supset u_\beta} u_\alpha$.

Рассмотрим теперь комплекс $\mathfrak{M}$ копредпучков модулей над X:

$$\mathfrak{M} = \ldots \to \mathfrak{M}_{q-1} \xrightarrow{\tau_{q-1}} \mathfrak{M}_q \xrightarrow{\tau_q} \mathfrak{M}_{q+1} \to \ldots$$

Для каждого $(U_\alpha, V_\alpha) \in \mathrm{Cov}(X, A)$ образуем группы

$$D_n(K_\alpha, \mathfrak{M}) = \sum_i C_{n+i}(K_\alpha, \mathfrak{M}_i), \qquad D_n(L_\alpha, \mathfrak{M}) = \sum_i C_{n+i}(L_\alpha, \mathfrak{M}_i),$$

где $C_{n+i}(K_\alpha, \mathfrak{M}_i)$ — группа $(n+i)$-мерных цепей с коэффициентами в копредпучке $\mathfrak{M}_i$ на покрытии U_α, а $C_{n+i}(L_\alpha, \mathfrak{M}_i)$ — ее подгруппа, состоящая из таких цепей, которые принимают значение нуль на симплексах, не принадлежащих L_α.

Пусть $\check{C}_n(X, A, \mathfrak{M})$ — фактор-группа $\varprojlim_\alpha \{D_n(K_\alpha, \mathfrak{M}), q_\beta^\alpha\}$ по подгруппе $\varprojlim_\alpha \{D_n(L_\alpha, \mathfrak{M}), \bar{q}_\alpha^\beta\}$, где q_β^α, $\bar{q}_\beta^\alpha$ — гомоморфизмы, индуцированные симплициальным отображением p_β^α. Определим граничный оператор ∂_n^α: $D_n(K_\alpha, \mathfrak{M}) \to D_{n-1}(K_\alpha, \mathfrak{M})$, полагая $\partial_n^\alpha(c_{n+i}) = (-1)^n \partial c_{n+i} + \tau_i'(c_{n+i})$, где τ_i' — гомоморфизм цепей, индуцированный гомоморфизмом τ_i. Система граничных операторов $\{\partial_n^\alpha\}$ индуцирует граничный оператор ∂_n: $\check{C}_n(X, A, \mathfrak{M}) \to \check{C}_{n-1}(X, A, \mathfrak{M})$ и n-мерная группа гомологии $H_n(X, A, \mathfrak{M})$ цепного комплекса $\check{C}_*(X, A, \mathfrak{M}) = \{\check{C}_{*n}(X, A, \mathfrak{M}), \partial_n\}$ называется n-мерной группой гомологии пары (X, A) с коэффициентами в комплексе $\mathfrak{M}$ копредпучков модулей над X.

Пусть $\mathfrak{G}$ — копредпучок модулей над X; рассмотрим его инъективную резольвенту: $0 \to \mathfrak{G} \xrightarrow{\eta} \mathfrak{M}_0 \xrightarrow{\tau_0} \mathfrak{M}_1 \xrightarrow{\tau_1} \ldots \to \mathfrak{M}_q \xrightarrow{\tau_q} \ldots$ n-Мерной группой гомологии пространства X с коэффициентами в копредпучке $\mathfrak{G}$ назовем группу $H_n(X, \mathfrak{G}) = H_n(X, \phi, \mathfrak{M}')$, где $\mathfrak{M}' = \ldots \to 0 \to \mathfrak{M}_0 \xrightarrow{\tau_0} \mathfrak{M}_1 \xrightarrow{\tau_1} \ldots \to \mathfrak{M}_q \xrightarrow{\tau_q} \ldots$, которая не зависит от инъективной резольвенты копредпучка $\mathfrak{G}$.

Для каждой точной последовательности копредпучков над X $0 \to \mathfrak{G}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{G} \xrightarrow{\beta} \mathfrak{G}_2 \to 0$ имеем точную последовательность

$$\ldots \to H_{n+1}(X, \mathfrak{G}_2) \to H_n(X, \mathfrak{G}_1) \to H_n(X, \mathfrak{G}) \to H_n(X, \mathfrak{G}_2) \to \ldots$$

Если комплексы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ являются конечными комплексами постоянных копредпучков инъективных модулей над наследственным кольцом, то имеет место

Теорема 1. *Для метрических пространств группы гомологии $H_n(X, A, \mathfrak{M})$ являются обобщенными группами гомологии Стинрода, группы гомологии $H_n(X, A, \mathfrak{M}')$ удовлетворяют аксиоматике Милнора теории гомологии Стинрода, причем $H_n(X, \mathfrak{M}')$ изоморфна $(n+1)$-мерной группе гомологии Стинрода с коэффициентами в постоянном копредпучке G.*

Точные теории гомологии, аналогичные или обобщающие теории гомологии Стинрода построены также в ([4], [6–9]).

Пусть A — компактное подмножество $(n+1)$-мерной сферы S^{n+1}. Рассмотрим триангуляции T_i сферы S^{n+1}, $i = 0, 1, \ldots$, где T_{i+1} — барицентрическое подразделение T_i. Пусть K_i, $i = 0, 1, \ldots$, — наименьший подкомплекс T_i, содержащий A_i и φ_i: $K_{i+1} \to K_i$ — симплициальное отображение, индуцированное вписанностью звездных покрытий. Рассмотрим цепной комплекс $\tilde{C}_*(A, \mathfrak{L}_m) = \varprojlim_i \{C_*(K_i, \mathfrak{L}_m), \tilde{\varphi}_i\}$, где $C_*(K_i, \mathfrak{L}_m) = \operatorname{Hom}(C^*(K_i, Z), \mathfrak{L}_m)$, а $\tilde{\varphi}_i$ — цепное отображение, индуцированное φ_i.

Группа гомологии $\tilde{H}_r(A, \mathfrak{L}_m) = \varprojlim_i \{H_r C_*(K_i, \mathfrak{L}_m), \tilde{\varphi}_i\}$ естественно изоморфна группе $\check{H}_r(A, \mathfrak{L}_m)$ и, если $\mathfrak{L}_m$ является комплексом групп с бесконечным делением, то группа гомологии $\tilde{H}_r(A, \mathfrak{L}_m)$ комплекса $\tilde{C}_*(A, \mathfrak{L}_m)$ изоморфна группе $H_r(A, \mathfrak{L}_m)$. Пусть K_i^* — двойственный комплекс комплекса K_i и $\overset{*}{C}_*(K_i^*, \mathfrak{L}_m)$ — звездный цепной комплекс для K_i^* с коэффициентами в $\mathfrak{L}_m^*$. Симплициальное отображение φ_i индуцирует отображение φ_i^*: $\overset{*}{C}_*(K_i^*) \to \overset{*}{C}_*(K_{i+1}^*)$ и пусть $\overline{H}_{n-r}(B, \mathfrak{L}_m^*) = \varprojlim_i \{H_{n-r}\overset{*}{C}_*(K_i^*, \mathfrak{L}_m^*)\bar{\varphi}_i^*\}$, где $B = S^{n+1} \setminus A$. Эта группа гомологии естественно изоморфна группе $\check{H}_{n-r}(B, \mathfrak{L}_m^*)$.

Пусть $\tilde{Z}_r(A, \mathfrak{L}_m)$ — группа r-мерных циклов комплекса $\tilde{C}_*(A, \mathfrak{L}_m)$, $\tilde{z}_r \in \tilde{Z}_r(A, \mathfrak{L}_m)$, $\tilde{z}_r = \{z_r^i\}$, и пусть $\overset{*}{z}_{n-r} \in \overset{*}{Z}_{n-r}(B, \mathfrak{L})$, $\overset{*}{z}_{n-r} = \{\overset{*}{z}_{n-r}\}$, где Z_{n-r}^* — прямой предел $\{Z_{n-r}(K_i^*, \mathfrak{L}_m^*), c_i^*\}$, рассмотренных как дискретные группы, а c_i^*: $\overset{*}{C}_{n-r}(K_i^*, \mathfrak{L}_m^*) \to \overset{*}{C}_{n-r}(K_{i+1}^*, \mathfrak{L}_m^*)$ индуцирован φ_i^*. Определим коэффициент зацепления циклов $\tilde{z}_r$ и $\overset{*}{z}_{n-r}$: $\bigvee(\tilde{z}_r, \overset{*}{z}_{n-r}) = \bigvee(z_r^i, \overset{*}{z}_{n-r})$, не зависящий от i, и назовем зацеплением для двойственности Александера — Понтрягина с коэффициентами в комплексе $\mathfrak{L}_m$.

Теорема 2. *Если A — замкнутое подмножество $(n+1)$-мерной сферы S^{n+1}, то при помощи зацепления $\bigvee \tilde{z}_r, \overset{*}{z}_{n-r})$ группа гомологии $\check{H}_r(A, \mathfrak{L}_m)$ двойственна группе гомологии $\check{H}_{n-r}(S^{n+1} \setminus A, \mathfrak{L}_m^*)$, когда $0 < r < n$, если $m = 0, 1$, и когда $m \leqslant r \leqslant n - m$, если $m > 1$.*

Пусть $\mathfrak{L}_1 = \ldots \to 0 \to L_0 \xrightarrow{\tau_0} L_1 \to 0 \to \ldots$ — комплекс групп с бесконечным делением, τ_0 — эпиморфизм и $\operatorname{Ker} \tau_0 \approx G$. Тогда из теоремы 1 следует, что имеем изоморфизм ϑ группы гомологии Стинрода $H'_{r+1}(A, G)$ на группу $\tilde{H}_r(A, \mathfrak{L}_1)$.

Так как $\prod_i B_r(K_i, \mathfrak{L}_1) / \tilde{B}_r$ — группа с бесконечным делением, то существует гомоморфизм ω: $\tilde{H}_r(A, \mathfrak{L}_1) \to \prod_i B_r(K_i, \mathfrak{L}_1) / \tilde{B}_r$ такой, что $\omega\psi = \sigma$, где $\tilde{B}_r$ — группа r-мерных ограничивающих комплекса $\tilde{C}_*(A, \mathfrak{L}_1)$, σ — вложение, а ψ: $\varprojlim_i B_r(K_i, \mathfrak{L}_1) / \tilde{B}_r \to \tilde{H}_r(A, \mathfrak{L}_1)$ — ядро естественного гомоморфизма φ: $\tilde{H}_r(A, \mathfrak{L}_1) \to \overline{H}_r(A, \mathfrak{L}_1)$. Пусть μ: $\tilde{H}_r(A, \mathfrak{L}_1) \to \prod_i B_r(K_i, \mathfrak{L}_1) / / \tilde{B}_r + \overline{H}_r(A, \mathfrak{L}_1)$ — гомоморфизм, индуцированный гомоморфизмами ω и φ.

Тогда μ является мономорфизмом. Тем самым имеем мономорфизм $\gamma = \mu\vartheta\colon H'_{r+1}(A, G) \to \prod\limits_i B_r(K_i, \mathfrak{L}_1) / \tilde{B}_r + \bar{H}_r(A, \mathfrak{L}_1)$.

Пусть K_i' — комплекс, состоящий из барицентрических звезд симплексов, входящих в K_i. Отображение φ_i индуцирует гомоморфизм $\varphi_i'\colon \quad C_{n-r+1}(K_i', \mathfrak{L}_1^*) \to \overset{*}{C}_{n-r+1}(K'_{+1}, \mathfrak{L}_1^*)$ и мы имеем изоморфизм $\alpha^r\colon \ \bar{C}^r(A, \mathfrak{L}_1^*) = \varinjlim_i \{C^r(K_i, \mathfrak{L}_1^*), \varphi_i\} \approx \varinjlim_i \{\overset{*}{C}_{n-r+1}(K_i', \mathfrak{L}_1^*), \varphi_i'\}$, который перестановочен с кограничным оператором δ^r и с ограничением ∂'_{n-r+1} на K_i' граничного оператора ∂_{n-r+1}.

Пусть $\bar{\beta}\colon \sum\limits_i C^r(K_i, \overset{*}{\mathfrak{L}}_1)/Z^r(K_i, \overset{*}{\mathfrak{L}}_1) \to \bar{C}^r(A, \overset{*}{\mathfrak{L}}_1)/\bar{Z}^r(A, \overset{*}{\mathfrak{L}}_1)$ — гомоморфизм, сопряженный вложению $\beta\colon \tilde{B}_r(A, \mathfrak{L}_1) \to \prod\limits_i B_r(K_i, \mathfrak{L}_1)$. Тогда $\operatorname{Ker}\bar{\beta}$ двойственна $\prod\limits_i B_r(K_i, \mathfrak{L}_1)/\tilde{B}_r$ и, если $\operatorname{Ker}\overset{*}{\beta}$ — ядро гомоморфизма $\overset{*}{\beta}\colon \sum\limits_i \overset{*}{B}_{n-r}(K_i', \overset{*}{\mathfrak{L}}_1) \to$ $\to \operatorname{Im}\partial'_{n-r+1}$, индуцированного $\bar{\beta}$, то группа $\operatorname{Ker}\overset{*}{\beta} + \bar{H}_{n-r}(B, \overset{*}{\mathfrak{L}}_1)$ двойственна группе $\prod\limits_i B_r(K_i, \mathfrak{L}_1)/\tilde{B}_r + \bar{H}_r(A, \mathfrak{L}_1)$.

Рассмотрим ее естественный гомоморфизм $\tau\colon \operatorname{Ker}\overset{*}{\beta} + \bar{H}_{n-r}(B, \mathfrak{L}_1^*) \to$ $\to H''_{n-r}(B, \mathfrak{L}_1^*, \omega)$ на ее фактор-группу по подгруппе тех элементов, которые аннулируются на каждом $\gamma(z'_{r+1})$, где $z'_{r+1} = (K, \varepsilon, c_{r+1})$ — регулярный $(r+1)$-мерный цикл компактного множества A, $|K| = S^{n+1} \setminus A$ и ε — регулярное отображение, соответствующее тождественному отображению бесконечного симплициального комплекса K. Тогда имеем мономорфизм $\eta\colon H''_{n-r}(B, \mathfrak{L}_1^*, \omega) \to H_{n-r}(B, G^*)$, индуцированный законом двойственности Пуанкаре.

Пусть $\overset{*}{b}{}^i_{n-r} \in \overset{*}{B}_{n-r}(K_i', \mathfrak{L}_1^*)$ и $\overset{*}{c}{}^i_{n-r+1}$ — $(n-r+1)$-мерная звездная цепь с коэффициентами в $\mathfrak{L}_1^*$, которая равняется нулю на дополнении к K_i', и такая, что ограничение цепи $\partial\overset{*}{c}{}^i_{n-r+1}$ на K_i' совпадает с $\overset{*}{b}_{n-r}$ и пусть $b_r^i \in B_r(K_i, \mathfrak{L}_1)$. Тогда $I(b_r^i, \overset{*}{c}{}^i_{n-r+1})$ назовем зацеплением между b_r^i и $\overset{*}{b}{}^i_{n-r}$ и обозначим $\bigvee'(b_r^i, \overset{*}{b}{}^i_{n-r})$. Зацепления $\{\bigvee(b_r^i, \overset{*}{b}{}^i_{n-r}),\ i = 0, 1, \ldots\}$ однозначно индуцируют зацепление $\bigvee'(b_r, \overset{*}{b}_{n-r})$ между $\prod\limits_i B_r(K_i, \mathfrak{L}_1)$ и $\sum\limits_i B_{n-r}(K_i', \overset{*}{\mathfrak{L}}_1)$.

Рассмотрим цикл $Z'_{n-r} \in h'_{n-r} \in \operatorname{Im}\eta$ и регулярный цикл $z'_{r+1} =$ $= (K, \varepsilon, c_{r+1})$. Пусть $\eta\tau(\overset{*}{b}_{n-r}, \bar{h}_{n-r}) = h'_{n-r}$, $z_{n-r} \in \bar{h}_{n-r}$ и $\gamma(z'_{r+1}) =$ $= (\bar{b}_r, \bar{h}_r)$, $b_r \in \bar{b}_r$, $\tilde{z}_r \in \bar{h}_r$. Тогда $\bigvee(z'_{r+1}, z'_{n-r}) = \bigvee(b_r, \overset{*}{b}_{n-r}) + \bigvee(\tilde{z}, z_{n-r})$ назовем зацеплением для двойственности Стинрода.

Теорема 3. *Если A — замкнутое подмножество $(n+1)$-мерной сферы S^{n+1}, то двойственность Стинрода группы гомологии Стинрода $H'_{r+1}(A, G)$ с группой гомологии $H_{n-r}(S^{n+1} \setminus A, G^*)$ выражается через зацепление* (4).

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
30 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Inassaridzé, Proc. of the Intern. Symp. on Topology and its Applications, Beograd, 1969, p. 195. [2] N. E. Steenrod, Ann. Math., 41, № 2, 833 (1940). [3] P. S. Alexandrov, Fund. Math., 41, fasc. 1, 68 (1954). [4] J. Milnor, On the Steenrod Homology Theory (Mimeographed), Princeton, 1960. [5] П. С. Александров, Уч. зап. Московск. унив., в. 45 (1940). [6] Г. С. Гогошвили, УМН, 21, в. 4, 23 (1966). [7] К. А. Ситников, ДАН, 81, № 3, 359 (1951). [8] Е. Г. Скляренко, УМН, 24, в. 5, 87 (1969). [9] A. Borel, J. C. Moore, Michigan Math. J., 7, № 2, 137 (1960).