

УДК 513.3.731

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. В. ПОГОРЕЛОВ

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ ЧЕТВЕРТОЙ ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

Когда говорят о четвертой проблеме Гильберта, обычно имеют в виду определение всех метризаций проективного пространства, для которых прямые являются геодезическими ⁽¹⁾. Решение проблемы Гильберта в этом смысле для достаточно регулярных метрик было дано Гамелем ⁽²⁾. В данной работе эта проблема решается без каких-либо дополнительных предположений.

1. Пусть P — проективное пространство, X — произвольное множество точек пространства и πX — множество плоскостей пространства, пересекающих X . Будем обозначать через σ любую неотрицательную вполне аддитивную функцию, заданную на множестве плоскостей пространства P и удовлетворяющую условиям:

- 1) $\sigma(\pi X) = 0$, если X состоит из одной точки,
- 2) $\sigma(\pi X) > 0$, если X содержит континуум.

С помощью функции σ мы определяем измерение отрезков прямых следующим образом. Длиной отрезка xy будем называть число $|xy| = \sigma(\pi xy)$. Очевидно, определяемая таким образом длина отрезка обладает обычными свойствами. Именно, $|xy| > 0$, $|xy| = |xz| + |yz|$, если z — точка отрезка xy .

Введем теперь метрику в пространстве P , полагая $\rho(x, y)$ равным длине меньшего из отрезков xy , на которые точки x и y разбивают прямую xy . Определяемая так метрика удовлетворяет аксиомам метрического пространства: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\rho(x, y) \geq 0$, причем равенство имеет место только при $x = y$, $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$. Выполнимость первых двух аксиом непосредственно вытекает из определения метрики. Проверим выполнимость третьей аксиомы (неравенство треугольника).

В случае, если три точки x, y, z лежат на одной прямой, неравенство треугольника следует из аддитивности длины отрезка и определения расстояния между точками как длины меньшего из отрезков, соединяющих эти точки. В случае, если точки x, y, z не лежат на одной прямой, неравенство треугольника следует из предложения Паша. Действительно, пусть xyz — проективный треугольник и его стороны xz и yz являются меньшими отрезками соответствующих прямых xz и yz . Согласно предложению Паша, плоскость α , пересекающая сторону xy треугольника, пересекает по крайней мере одну из двух других сторон xz, yz . Поэтому $\pi xy \subset \pi xz + \pi yz$. Следовательно, $|xy| \leq |xz| + |yz|$. Но $\rho(x, z) = |xz|$, $\rho(y, z) = |yz|$, а $\rho(x, y) \leq |xy|$. Отсюда $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$, что и требовалось доказать.

Метрику в пространстве P , задаваемую с помощью функции σ , будем называть σ -метрикой ⁽³⁾.

Если значение функции σ на множестве всех плоскостей πP пространства конечно, то σ -метрика определена во всем пространстве. Величина $\sigma(\pi P)$ имеет простой геометрический смысл. Это длина прямых в σ -метрике. Если же $\sigma(\pi P) = \infty$, то σ -метрика определена в некоторой выпуклой области G пространства P . Действительно, пусть a — фиксированная точка пространства P . Обозначим через G множество таких точек x ,

для которых $\rho(a, x) < \infty$. Множество G выпуклое. В самом деле, если $x, y \in G$, то $\rho(x, y) < \infty$. Следовательно, точки x, y соединяются отрезком длины $\rho(x, y)$. Для каждой точки z этого отрезка $\rho(a, z) \leq \rho(a, x) + \rho(x, y) < \infty$, т. е. отрезок xy принадлежит G . А это обозначает выпуклость G . Область G нельзя расширить, сохраняя конечность расстояний.

Покажем, что прямые в G являются геодезическими. Действительно, пусть g — прямая (или отрезок прямой) в G . Пусть x — внутренняя точка g . Из свойств функции σ следует существование отрезка yz сколь угодно малой длины с внутренней точкой x . Можно считать, что $\rho(y, z) = |yz|$. Отсюда следует, что отрезок yz является кратчайшей соединяющей точки y, z , а это значит, что g — геодезическая.

Теорема 1. В проективном пространстве любая непрерывная метрика, для которой прямые являются геодезическими, есть σ -метрика.

Непрерывность метрики надо понимать как непрерывность функции $\rho(x, y)$. Доказательство теоремы 1 приводится в п. 4.

2. Будем интерпретировать проективное пространство P как евклидово пространство с прямоугольными декартовыми координатами x_i , пополненное несобственными (бесконечно удаленными) элементами. Метрику в пространстве P , для которой прямые являются геодезическими, будем называть проективной. Проективную метрику будем называть регулярной, если она задается линейным элементом $ds = F(x, \dot{x})dt$, где F — регулярная функция, положительно однородная первой степени, выпуклая и четная по $\dot{x}$. Не ограничивая общности, в качестве параметра t будем брать евклидову дугу.

Теорема 2. Регулярная проективная метрика является σ -метрикой. Ее линейный элемент допускает представление

$$ds = \int_{\omega} \gamma(\xi, x\xi) |\xi dx| d\xi, \quad (*)$$

где $\gamma(\xi, x\xi)$ — неотрицательная функция, а интегрирование выполняется по площади единичной сферы ω : $|\xi| = 1$. Функция σ , задающая эту метрику, определяется равенством $d\sigma = \gamma(\xi, p) dp d\xi$, где p и ξ — коэффициенты в уравнении плоскости $x\xi - p = 0$.

Доказательство. Рассмотрим подробно двумерный случай (P — плоскость). Пусть $ds = F(x, \dot{x})dt$ — линейный элемент проективной метрики. Так как геодезическими являются прямые, то уравнение Эйлера для функции F имеет вид

$$\partial F / \partial x_k - \dot{x}_\alpha \partial^2 F / \partial \dot{x}_k \partial x_\alpha = 0.$$

Дифференцируя это уравнение по $\dot{x}_k$, получим $\dot{x}_\alpha \partial(\partial^2 F / \partial \dot{x}_k^2) / \partial x_\alpha = 0$. Пусть g — произвольная прямая. Примем ее за ось x_1 . Тогда вдоль этой прямой, т. е. при $x_2 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$, $\partial(\partial^2 F / \partial \dot{x}_2^2) / \partial x_1 = 0$. Следовательно, $\partial^2 F / \partial \dot{x}_2^2$ не зависит от x_1 и является, таким образом, функцией прямой g . Обозначим эту функцию $\gamma(g)$.

Построим регулярную σ -метрику, задаваемую функцией распределения $\gamma(\xi, x\xi) = \gamma(g)$ по формуле (*). Пусть $ds = F_1(x, \dot{x})dt$ — ее линейный элемент. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $F = cF_1$, где c — постоянная.

Возьмем малый равнобедренный треугольник ABC с основанием AB на прямой g , равным δ , и малыми углами при основании, равными α . Величину $|AC| + |BC| - |AB|$ можно выразить двумя способами: через функцию F_1 и функцию распределения γ . При малых α и δ эти выражения будут $\sim c_1 \delta \alpha^2 \partial^2 F_1 / \partial \dot{x}_2^2$ и $c_2 \delta \alpha^2 \gamma(g)$, где c_1 и c_2 — постоянные. Переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$, а затем $\alpha \rightarrow 0$, получаем связь между функциями F_1 и γ . Именно, $\gamma = c \partial^2 F_1 / \partial \dot{x}_2^2$, где c — постоянная. Следовательно, $\partial^2 F / \partial \dot{x}_2^2 = c \partial^2 F_1 / \partial \dot{x}_2^2$. Отсюда, ввиду произвола прямой g и точки на ней, к которой стягивается треугольник ABC при переходе к пределу,

функции F и cF , отличаются только линейным относительно $\dot{x}$ слагаемым. А так как обе функции четные, то это слагаемое равно нулю и, следовательно, $F = cF_1$, что и требовалось доказать.

В трехмерном случае доказательство аналогично. Связь функций F_1 и $\gamma(\alpha)$ имеет вид

$$\partial^2 F_1 / \partial \dot{x}_2^2 = c \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \gamma(\alpha) \cos \vartheta d\vartheta.$$

Здесь x_2 лежит в плоскости треугольника ABC , ϑ — угол между плоскостью α , проходящей через прямую g , и плоскостью треугольника. Из этого уравнения находится γ через F_1 .

3. Если метрики $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$ проективные, то при $\lambda, \mu > 0$ метрика $\rho(x, y) = \lambda \rho_1(x, y) + \mu \rho_2(x, y)$ также проективная. Это соображение является основным в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 3. *Любая непрерывная проективная метрика допускает приближение регулярными проективными метриками, равномерное в любой компактной области.*

Доказательство. Рассмотрим двумерный случай. Пусть $\rho(x, y)$ — данная проективная метрика. Положим

$$\rho_\delta(x, y) = \lambda \int_{|r| < \delta} \varphi(r) \rho(x + r, y + r) dr,$$

где $\varphi(r) = \exp(r^2 - \delta^2)^{-1}$ при $|r| < \delta$, $\varphi(r) = 0$ при $|r| \geq \delta$,

$$\lambda \int \varphi(r) dr = 1.$$

Метрика ρ_δ получается из данной метрики путем усреднения по сдвигам на вектор r , а следовательно, проективна. Положим

$$F_\delta(x, \xi) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \rho_\delta(x, x + \xi h), \quad |\xi| = 1.$$

Мы утверждаем, что функция F_δ существует при любых x, ξ и допускает равномерную оценку в компактной области. В самом деле, рассмотрим функцию $\rho_\delta(x + a\xi, x)$, $a \geq 1$. Эта функция дифференцируема по x . Она монотонна по a и поэтому дифференцируема по a почти всюду. Ввиду ограниченности ρ_δ в компактной области, найдется $a' \leq a$, для которого производная $\rho_\delta(x + a'\xi, x)$ по a существует и допускает равномерную оценку. Отсюда, ввиду дифференцируемости этой функции по x , получается дифференцируемость функции $\rho_\delta(x + a'\xi, x + \xi h)$ по h при $h = 0$, т. е. существование $F_\delta(x, \xi)$ и оценка для нее.

Очевидно, метрика, задаваемая линейным элементом $ds = F_\delta(x, \dot{x})dt$, совпадает с метрикой ρ_δ . Усредним теперь методику ρ_δ , полагая

$$F_{\delta\epsilon}(x, \xi) = \lambda \int_{|r| < \epsilon} \varphi(r) F_\delta(x + r, \xi) dr.$$

Метрика $\rho_{\delta\epsilon}$, задаваемая линейным элементом $F_{\delta\epsilon}(x, \dot{x})dt$, снова будет проективной. Функция $F_{\delta\epsilon}(x, \xi)$ регулярна по x . Остается обеспечить регулярность по ξ .

Обозначим через A_ϑ поворот относительно начала координат на угол ϑ . Положим

$$F_{\delta\epsilon\alpha}(x, \dot{x}) = \lambda \int_{|\vartheta| < \alpha} \varphi(\vartheta) F_{\delta\epsilon}(A_\vartheta x, A_\vartheta \dot{x}) d\vartheta.$$

Метрика $\rho_{\delta\epsilon\alpha}$, задаваемая линейным элементом $F_{\delta\epsilon\alpha}(x, \dot{x})dt$, проективна. Вместе с тем она регулярна, так как функция $F_{\delta\epsilon\alpha}(x, \dot{x})$ регулярна по

обеим переменным. Ввиду непрерывности исходной метрики $\rho(x, y)$, метрика $\rho_{\delta, \varepsilon, \alpha}(x, y)$ при достаточно малых δ, ε и α равномерно приближает метрику $\rho(x, y)$ в данной компактной области. Что и требовалось доказать. Доказательство теоремы в трехмерном случае аналогично.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть $\rho(x, y)$ — данная проективная метрика. По теореме 3, существует последовательность регулярных проективных метрик $\rho_n(x, y)$, сходящаяся к метрике $\rho(x, y)$ равномерно в любой компактной области. По теореме 2, метрика $\rho_n(x, y)$ является σ -метрикой. Пусть σ_n — вполне аддитивная функция, задающая метрику ρ_n .

Пусть G — компактная область, X — произвольное множество в G диаметра меньше δ (в метрике ρ). Из равномерной сходимости метрик ρ_n к ρ в G следует, что при достаточно больших n $\sigma_n(X)$ мало вместе с δ . Отсюда следует, что из последовательности функций σ_n можно выделить слабо сходящуюся последовательность. Предельная функция $\sigma = \lim \sigma_n$, очевидно, задает данную метрику. Теорема доказана.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук СССР
Харьков

Поступило
3 VIII 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Буземан, УМН, 21, в. 1 (1966). ² G. Hamel, Math. Ann., 57 (1903).
³ H. Buseman, Ann. mat. pura ed appl., 55 (1961).