Проблемы физики, математики и техники, № 3 (64), 2025 **ISSN 2077-8708**

УДК 512.542

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_99
EDN: BFOPLO

О $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-КРИТИЧЕСКИХ ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь

Белорусский государственный университет, *Минск*

ON $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-CRITICAL FORMATIONS OF FINITE GROUPS

I.N. Safonova, V.V. Skrundz

Belarusian State University, *Minsk*

Аннотация. Изучаются $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-критические формации или, иначе, минимальные τ-замкнутые σ-локальные не $\mathfrak{H}$-формации конечных групп, где $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп, σ – разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, τ – подгрупповой функтор. Получен критерий для минимальных τ-замкнутых σ-локальных формаций. Дано описание σ-локальных формаций такого типа для формаций всех Π-групп, всех σ-разрешимых и всех σ-нильпотентных Π-групп, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. В частности, получено описание минимальных τ-замкнутых σ-локальных не σ-разрешимых и не σ-нильпотентных формаций конечных групп.

Ключевые слова: *конечная группа*, *формационная σ-функция*, *σ-локальная формация*, *подгрупповой функтор*, *критическая функторно замкнутая σ-локальная формация*, *σ-разрешимая группа.*

Для цитирования: *Сафонова*, *И.Н.* О $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-критических формациях конечных групп / И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 99–111. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_99. – EDN: BFOPLO

Abstract. We study $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-critical formations or, in other words, minimal τ-closed σ-local non-$\mathfrak{H}$-formations of finite groups, where $\mathfrak{H}$ is some class of groups, σ is a partition of the set of all prime numbers $\mathbb{P}$, and τ is a subgroup functor. A criterion for minimal τ-closed σ-local formations is obtained. A description of σ-local formations of this type is given for the formations of all Π-groups, all σ-soluble and all σ-nilpotent Π-groups, where $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. In particular, a description of minimal τ-closed σ-local non-σ-soluble and non-σ-nilpotent formations of finite groups is obtained.

Keywords: *finite group*, *formation σ-function*, *σ-local formation*, *subgroup functor*, *critical functor-closed σ-local formation*, *σ-soluble group.*

For citation: *Safonova*, *I.N.* On $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-critical formations of finite groups / I.N. Safonova, V.V. Skrundz // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 3 (64). – P. 99–111. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_3_64_99 (in Russian). – EDN: BFOPLO

Введение

В теории локальных формаций в вопросах изучения внутренней структуры и классификации формаций важную роль играют так называемые минимальные локальные не $\mathfrak{H}$-формации [1] или $\mathfrak{H}_l$-критические формации [2], т. е. такие локальные формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные локальные подформации которых содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Общая проблема изучения критических формаций была поставлена Л.А. Шеметковым [1] на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп. Решению этой задачи для локальных формаций был посвящен цикл работ А.Н. Скибы 1980–1993 гг., который завершился построением теории критических локальных формаций, наиболее общим результатом которой стало описание минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для случая, когда $\mathfrak{H}$ – произвольная формация классического типа [3], т. е. формация, имеющая такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны. Результаты теории минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций широко использовались в вопросах изучения локальных формаций с заданными решетками подформаций, классификации локальных формаций, а также при изучении несократимых факторизаций локальных формаций [4], [5].

Развитие теории σ-локальных формаций привело к необходимости изучения и классификации критических σ-локальных формаций. При этом, следуя [1], [2], *минимальной σ-локальной* *не $\mathfrak{H}$-формацией* или $\mathfrak{H}_\sigma$*-критической формацией* [6] мы называем σ-локальную формацию $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, все собственные σ-локальные подформации которой содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Необходимо отметить, что задача Л.А. Шеметкова о классификации критических формаций в классе σ-локальных формаций была решена в работах [6], [7] для произвольной σ-локальной формации $\mathfrak{H}$ классического типа.

Изучение $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-критических формаций начато авторами в [8]. В данной работе мы продолжаем изучение свойств формаций такого типа и первым, из основных результатов работы, является доказанный нами критерий для минимальных τ-замкнутых σ-локальных формаций. Кроме того, в работе дано описание σ-локальных формаций такого типа для формаций всех П-групп, всех σ-разрешимых и всех σ-нильпотентных П-групп, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. В частности, получено описание минимальных τ-замкнутых σ-локальных не σ-разрешимых и не σ-нильпотентных формаций конечных групп.

В качестве следствий полученных результатов в классическом случае, т. е. когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$, получено описание минимальных локальных не $\mathfrak{H}$-формаций, где $\mathfrak{H}$ – формация всех π-групп, формация всех разрешимых и нильпотентных π-групп, где $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$, а также формации всех разрешимых и нильпотентных групп.

1 Обозначения и определения

Основные определения, обозначения и общие свойства σ-локальных формаций представлены в работах [9]–[17]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$. Если n целое число, G – группа и $\mathfrak{F}$ – класс групп, то $\sigma(n)$ обозначает множество $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$; $\sigma(G) = \sigma(|G|)$; $\sigma(\mathfrak{F}) = \cup_{G\in\mathfrak{F}}\sigma(G)$.

Группа G называется [9, с. 2]: *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$; *σ-нильпотентной*, если G – прямое произведение σ-примарных групп; *σ-разрешимой*, если каждый главный фактор G σ-примарен. Класс всех σ-разрешимых групп обозначают через $\mathfrak{S}_\sigma$, а через $\mathfrak{N}_\sigma$ обозначают класс всех σ-нильпотентных групп.

Пусть $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$. Группу G называют П-группой, если $\sigma(G) \subseteq \Pi$. Через $\mathfrak{G}_\Pi$ обозначают класс всех П-групп, а через $\mathfrak{S}_\Pi$ (соответственно, $\mathfrak{N}_\Pi$) обозначают класс всех σ-разрешимых (соответственно σ-нильпотентных) П-групп. В частности, если $\Pi = \{\sigma_i\}$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – класс всех σ_i-групп, $\mathfrak{G}_{\sigma_i'}$ – класс всех σ_i'-групп, $\mathfrak{S}_{\sigma_i} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – класс всех σ-разрешимых σ_i-групп, $\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$ – класс всех σ-разрешимых σ_i'-групп и $\mathfrak{N}_{\sigma_i}$ – класс всех σ-нильпотентных σ_i'-групп, $\mathfrak{N}_{\sigma_i'}$ – класс всех σ-нильпотентных σ_i'-групп.

Функция f вида $f : \sigma \to \{\text{формации групп}\}$ называется *формационной σ-функцией* [10]. Для всякой формационной σ-функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и}$$
$$G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если для некоторой формационной σ-функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является σ-*локальной* [10], а f является σ-*локальным определением* $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп и каждой группе $G \in \mathfrak{X}$ сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Тогда τ называется *подгрупповым функтором* (в смысле А.Н. Скибы [5, с. 16]) на $\mathfrak{X}$, если выполняются условия: (1) $G \in \tau(G)$ для каждой группы $G \in \mathfrak{X}$; (2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеем $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$. В частности, если $\mathfrak{X}$ – класс всех групп, то подгрупповой функтор τ на $\mathfrak{X}$ называют просто подгрупповым функтором.

Подгрупповой функтор τ называют [5, с. 16]: *замкнутым*, если для любых двух групп G и $H \in \tau(G)$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(G)$; *тривиальным*, если $\tau(G) = \{G\}$ для любой группы G; *единичным*, если $\tau(G) = s(G)$ множество всех подгрупп группы G.

На множестве всех подгрупповых функторов частичный порядок $\leq$ вводят [5, с. 19] полагая, что $\tau_1 \leq \tau_2$, если $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G. Для любой совокупности подгрупповых функторов $\{\tau_j \mid j \in J\}$ определяют их пересечение $\tau = \cap_{j\in J}\tau_j$ следующим образом: $\tau(G) = \cap_{j\in J}\tau_j(G)$ для любых групп G. Если τ – произвольный подгрупповой функтор, то $\overline{\tau}$ – пересечение всех замкнутых подгрупповых функторов τ_i, для которых $\tau \leq \tau_i$, называют [5, с. 20] *замыканием функтора* τ.

Напомним также [5, с. 17], что через s_n обозначают подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе G множество $s_n(G)$ всех нормальных подгрупп группы G.

Подгруппу $A \in \tau(G)$ называют *τ-подгруппой* группы *G*.

Пусть τ – подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$ называется *τ-замкнутой* [5, с. 23], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $G \in \mathfrak{F}$. В частности, формация $\mathfrak{F}$ называется: *наследственной*, если она *s*-замкнута; *нормально наследственной*, если она s_n -замкнута.

Совокупность всех τ-замкнутых σ-локальных формаций будем обозначать через l_σ^τ. Формации из l_σ^τ мы называем l_σ^τ*-формациями.* Для любого набора групп $\mathfrak{X}$ символ $l_\sigma^\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$ обозначает l_σ^τ*-формацию порожденную* $\mathfrak{X}$, т. е. пересечение всех τ-замкнутых σ-локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$ для некоторой группы *G*, то $l_\sigma^\tau\mathrm{form}G$ называют *однопорожденной τ-замкнутой σ-локальной формацией*. Напомним также, что в классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$, однопорожденную τ-замкнутую локальную формацию, порожденную группой *G*, обозначают через $\tau^l\mathrm{form}G$, а τ-замкнутую формацию, порожденную набором групп $\mathfrak{X}$ обозначают символом $\tau\mathrm{form}\mathfrak{X}$.

Если *f* – формационная σ-функция, то символом $\mathrm{Supp}(f)$ обозначают *носитель f*, т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \varnothing$. Формационная σ-функция *f* называется: *τ-значной*, если $f(\sigma_i)$ – τ-замкнутая σ-локальная формация для каждого $\sigma_i \in \mathrm{Supp}(f)$; *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех *i*; *полной*, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех *i*. Если *F* – полная внутренняя формационная σ-функция и $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, то *F* называют *каноническим σ-локальным определением* $\mathfrak{F}$.

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – некоторый набор τ-значных формационных σ-функций. Мы используем символ $\cap_{j\in J} f_j$ для обозначения *формационной σ-функции h* такой, что $h(\sigma_i) = \cap_{j\in J} f_j(\sigma_i)$, в частности, $h(\sigma_i) = (f_1 \cap f_2)(\sigma_i) = f_1(\sigma_i) \cap f_2(\sigma_i)$ для всех *i*.

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ множество всех τ-значных σ-локальных определений формации $\mathfrak{F}$. Тогда мы говорим, что $f = \cap_{j\in J} f_j$ является *наименьшим τ-значным σ-локальным определением* $\mathfrak{F}$.

Для произвольного набора групп $\mathfrak{X}$ и любого $\sigma_i \in \sigma$ символом $\mathfrak{X}(\sigma_i)$ [12, с. 962] обозначают класс групп, определенный следующим образом: $\mathfrak{X}(\sigma_i) = (G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{X})$, если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{X}(\sigma_i) = \varnothing$, если $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{X})$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *минимальной τ-замкнутой не* $\mathfrak{H}$*-формацией* или $\mathfrak{H}^\tau$-критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные τ-замкнутые подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$. Следуя [1], [2] τ-замкнутую σ-локальную формацию $\mathfrak{F}$ мы называем *минимальной τ-замкнутой σ-локальной не* $\mathfrak{H}$*-формацией* или $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$*-критической формацией*, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все ее собственные τ-замкнутые σ-локальные подформации содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая σ-локальная формация. Формацию $\mathfrak{F}$ мы называем *неприводимой τ-замкнутой σ-локальной формацией* (или l_σ^τ*-неприводимой формацией*), если $\mathfrak{F} \neq l_\sigma^\tau\mathrm{form}(\cup_{i\in I} \mathfrak{X}_i)$, где $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$ – набор всех собственных τ-замкнутых σ-локальных подформаций из $\mathfrak{F}$. Если же найдутся такие собственные τ-замкнутые σ-локальные подформации $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$, то формацию $\mathfrak{F}$ мы называем *приводимой τ-замкнутой σ-локальной* (или l_σ^τ *-приводимой*) *формацией.*

2 Вспомогательные результаты

Для доказательства основных результатов нам понадобятся некоторые известные факты теории σ-локальных формаций, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 2.1 является частным случаем теоремы 1.1 работы [14].

Лемма 2.1 [14]. *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– некоторый непустой набор групп,* $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau\mathrm{form}\mathfrak{X} = LF_\sigma(f)$, *где f – наименьшее τ-значное σ-локальное определение* $\mathfrak{F}$. *Тогда верны следующие утверждения:*

(1) $\sigma(\mathfrak{X}) = \sigma(\mathfrak{F})$;

(2) $f(\sigma_i) = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}(\sigma_i)) = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{F}(\sigma_i))$ *для всех i*;

(3) *если h – произвольное τ-значное σ-локальное определение* $\mathfrak{F}$, *то для всех* $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ *имеем*

$$f(\sigma_i) = \tau\mathrm{form}(A \mid A \in \mathfrak{F} \cap h(\sigma_i), O_{\sigma_i}(A) = 1).$$

Лемма 2.2 [12, лемма 2.1]. *Пусть f и h – формационные σ-функции и пусть* $\Pi = \mathrm{Supp}(f)$. *Допустим, что* $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f) = LF_\sigma(h)$. *Тогда*:

(1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;

(2) $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i\in\Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_\Pi$. *Следовательно,* $\mathfrak{F}$ *является насыщенной формацией.*

(3) *Если каждая группа из* $\mathfrak{F}$ *является σ-разрешимой, то* $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i\in\Pi} \mathfrak{S}_{\sigma_i'}\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{S}_\Pi$.

(4) *Если* $\sigma_i \in \Pi$, *то*

$$\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}.$$

(5) $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$, *где F – единственная формационная σ-функция, такая что* $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *и* $F(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi'$. *Более того,* $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ *для всех i.*

***Лемма* 2.3** [14, лемма 3.2]. *Пусть* $\sigma_i \in \sigma$, $1 \neq P$ – σ_i*-группа,* A – *группа с* $O_{\sigma_i}(A) = 1$ *и* $G = P \wr A = K \rtimes A$ – *регулярное сплетение групп P и A, где K – база сплетения G. Тогда* $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G) = K$.

***Лемма* 2.4** [13, лемма 11]. *Если* $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ *и* $G / O_{\sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}$ *для некоторого* $\sigma_i \in \sigma(G)$, *то* $G \in \mathfrak{F}$.

Следуя [18], на множестве всех формационных σ-функций определяют частичный порядок $\leq$ следующим образом: пусть f_1 и f_2 – формационные σ-функции, тогда $f_1 \leq f_2$, если $f_1(\sigma_i) \subseteq f_2(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma$.

Лемма 2.5 является частным случаем следствия 3.1 работы [14].

***Лемма* 2.5** [14]. *Пусть* $\mathfrak{F}_j = LF_\sigma(f_j)$, *где* f_j – *наименьшее τ-значное σ-локальное определение формации* $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. *Тогда в том и только в том случае* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, *когда* $f_1 \leq f_2$.

***Лемма* 2.6** [7, лемма 2.1]. *Пусть* $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. *Тогда класс* $\mathfrak{G}_\Pi$ *всех* Π*-групп и класс* $\mathfrak{N}_\Pi$ *всех σ-нильпотентных* Π*-групп являются σ-локальными формациями и справедливы следующие утверждения*:

(1) $\mathfrak{G}_\Pi = LF_\sigma(g)$, *где g – каноническое σ-локальное определение формации* $\mathfrak{G}_\Pi$. *При этом,* $g(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\Pi$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *и* $g(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi'$;

(2) $\mathfrak{N}_\Pi = LF_\sigma(n) = LF_\sigma(N)$, *где n и N, соответственно, наименьшее и каноническое σ-локальное определения формации* $\mathfrak{N}_\Pi$. *При этом,* $n(\sigma_i) = (1)$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *и* $n(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi'$, $N(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi$ *и* $N(\sigma_i) = \varnothing$ *для всех* $\sigma_i \in \Pi'$.

***Лемма* 2.7** [5, лемма 2.1.5]. *Пусть A – монолитическая группа с монолитом* $R \not\subseteq \Phi(A)$. *Тогда формация* $\mathfrak{F} = \tau\mathrm{form} A$ *τ-неприводима и в ней имеется единственная максимальная τ-замкнутая подформация* $\mathfrak{M} = \tau\mathrm{form}((A/R) \cup \mathfrak{X})$, *где* $\mathfrak{X}$ – *множество всех собственных τ-подгрупп группы A.*

3 Критерий для $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-критических формаций

Основным результатом раздела 3 является следующая теорема, дающая критерий для $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-критических формаций.

***Теорема* 3.1.** *Пусть* $\mathfrak{H} = LF_\sigma(f)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, *где H – каноническое σ-локальное определение формации* $\mathfrak{H}$, *f – наименьшее τ-значное σ-локальное определение формации* $\mathfrak{F}$. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является минимальной τ-замкнутой σ-локальной не* $\mathfrak{H}$*-формацией, когда* $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, *где G – такая монолитическая* $\overline{\tau}$*-минимальная не* $\mathfrak{H}$*-группа с монолитом* $P = G^{\mathfrak{H}}$, *что для всех* $\sigma_i \in \sigma(P)$ *формация* $f(\sigma_i)$ *является минимальной τ-замкнутой не* $H(\sigma_i)$*-формацией.*

Доказательство. Необходимость. Обозначим через G – группу минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда G – монолитическая $\overline{\tau}$-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$. Поскольку при этом $l_\sigma^\tau \mathrm{form} G \subseteq \mathfrak{F}$ и все собственные τ-замкнутые σ-локальные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$.

Пусть $\sigma_i \in \sigma(P)$. Предположим, что $f(\sigma_i) = (1)$. Тогда в силу леммы 2.1 (2) имеем

$$f(\sigma_i) = \tau\mathrm{form}(G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) = (1).$$

Поэтому $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = G$. Значит, $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Так как G – монолитическая группа и $\sigma_i \in \sigma(P)$, то $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$, т. е. G является σ_i-группой. Поскольку при этом $G \notin \mathfrak{H}$, то $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ и $H(\sigma_i) = \varnothing$ ввиду леммы 2.2(5). Но тогда $f(\sigma_i) = (1)$ – минимальная τ-замкнутая не $H(\sigma_i)$-формация.

Пусть теперь $f(\sigma_i) \neq (1)$. По лемме 2.1 (2) имеет место равенство $f(\sigma_i) = \tau\mathrm{form}(G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G))$.

Пусть $\mathfrak{L}$ – произвольная собственная τ-замкнутая подформация из $f(\sigma_i)$. Допустим, что $\mathfrak{L} \not\subseteq H(\sigma_i)$ и обозначим через K группу минимального порядка из $\mathfrak{L} \setminus H(\sigma_i)$. Тогда K – монолитическая $\overline{\tau}$-минимальная не $H(\sigma_i)$-группа с монолитом $K^{H(\sigma_i)}$. Поскольку по лемме 2.2 (5) имеет место $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} H(\sigma_i)$, то $O_{\sigma_i}(K) = 1$.

Пусть S – некоторая неединичная σ_i-группа, $M = S \wr K = T \rtimes K$ – регулярное сплетение групп S и K, где T – база сплетения M. Тогда $T = O_{\sigma_i}(M) = O_{\sigma_i',\sigma_i}(M)$ по лемме 2.3. Так как $K \in \mathfrak{L} \subseteq f(\sigma_i)$, то $M = T \rtimes K \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$. Но в силу леммы 2.2 (4) имеет место включение $\mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $l_\sigma^\tau \mathrm{form} M \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим теперь, что $l_\sigma^\tau \mathrm{form} M = \mathfrak{F}$. Тогда, согласно лемме 2.1 (2), имеем

$$f(\sigma_i) = \tau\mathrm{form}(M / O_{\sigma_i', \sigma_i}(M)) =$$
$$= \tau\mathrm{form}(M / T) = \tau\mathrm{form} K \subseteq \mathfrak{L} \subset f(\sigma_i).$$

Получили противоречие. Следовательно, $l_\sigma^\tau \mathrm{form} M \subset \mathfrak{F}$. Значит, $l_\sigma^\tau \mathrm{form} M \subseteq \mathfrak{H}$. Но тогда по лемме 2.1 (3) имеем $M / O_{\sigma_i', \sigma_i}(M) = M / T \simeq \simeq K \in H(\sigma_i)$. Снова получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{L} \subseteq H(\sigma_i)$. Таким образом, всякая собственная τ-замкнутая подформация из $f(\sigma_i)$ содержится в $H(\sigma_i)$.

Предположим, что $f(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$. Рассмотрим прежде случай, когда P является σ-примарной группой. Тогда поскольку $\sigma_i \in \sigma(P)$, то P – σ_i -группа. Значит, $O_{\sigma_i'}(G) = 1$ и $O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i', \sigma_i}(G)$. По лемме 2.1 (2) имеем $G / O_{\sigma_i}(G) = = G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$. Так как по предположению $f(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$, то $G / O_{\sigma_i}(G) \in H(\sigma_i)$. Но тогда $G \in \mathfrak{H}$ в силу леммы 2.4. Последнее противоречит выбору группы G.

Значит, P не является σ-примарной группой. Поскольку при этом P – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G и $\sigma_i \in \sigma(P)$, то $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = 1$. Применяя теперь лемму 2.1 (2) имеем

$$G \simeq G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}.$$

Полученное противоречие показывает, что $f(\sigma_i) \not\subseteq H(\sigma_i)$. Таким образом, $f(\sigma_i)$ является минимальной τ-замкнутой не $H(\sigma_i)$ -формацией.

Достаточность. Пусть выполняются условия теоремы. Понятно, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{L}$ – произвольная собственная τ-замкнутая σ-локальная подформация из $\mathfrak{F}$, l – наименьшее τ-значное σ-локальное определение $\mathfrak{L}$. И пусть $\sigma_i \in \sigma(G) \setminus \sigma(P)$. Тогда $P \subseteq O_{\sigma_i', \sigma_i}(G)$ и $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) / P = O_{\sigma_i', \sigma_i}(G / P)$. Поскольку $P = G^{\mathfrak{H}}$, то

$$G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \simeq (G / P) / (O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) / P) =$$
$$= (G / P) / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G / P) \in H(\sigma_i).$$

Значит,

$$f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) =$$
$$= \mathfrak{G}_{\sigma_i} \tau\mathrm{form}(G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G)) \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} H(\sigma_i) = H(\sigma_i).$$

Кроме того, ввиду леммы 2.5 имеет место включение $l(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$. Следовательно, $l(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$. Пусть $\sigma_i \in \sigma(P)$. Допустим, что $l(\sigma_i) = f(\sigma_i)$. Если при этом P – σ_i -группа, то $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G)$ и поскольку

$$G / O_{\sigma_i}(G) = G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) = l(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{L},$$

то $G \in \mathfrak{L}$ по лемме 2.4. Но тогда имеет место включение $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G \subseteq \mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$. Противоречие. Поэтому P не является σ-примарной группой. Так как P – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = 1$. Но тогда $G \simeq G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) = l(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{L}$. Снова получаем, что $G \in \mathfrak{L}$, что невозможно. Таким образом, $l(\sigma_i) \subset f(\sigma_i)$. Поскольку по условию теоремы формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))_\tau$ -критической, то $l(\sigma_i) \subseteq H(\sigma_i)$. В силу леммы 2.1 (1) имеет место равенство $\sigma(G) = \sigma(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{H}$. Но тогда $\mathfrak{F}$ – $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критическая формация. □

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 3.1 получаем

***Следствие* 3.2** [7, теорема 3.1]. *Пусть $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$, f – наименьшее σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form} G$, где G – такая группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$ с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_i)$ является $H(\sigma_i)$ -критической.*

В случае, когда $\tau = s$ – единичный подгрупповой функтор, имеем

***Следствие* 3.3.** *Пусть $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$, f – наименьшее наследственное σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной наследственной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^s \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_i)$ является минимальной наследственной не $H(\sigma_i)$ -формацией.*

Если $\tau = s_n$, то из теоремы 3.1 получаем

***Следствие* 3.4.** *Пусть $\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$, $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, где H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{H}$, f – наименьшее нормально наследственное σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной нормально наследственной σ-локальной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^{s_n} \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$ формация $f(\sigma_i)$ является минимальной нормально наследственной не $H(\sigma_i)$ -формацией.*

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\dots\}$ из теоремы 3.1 получаем следующий известный результат.

***Следствие* 3.5** [5, следствие 2.1.2]. *Пусть h – канонический экран формации $\mathfrak{H}$, f – минимальный τ-значный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой локальной не $\mathfrak{H}$-формацией в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} = \tau^l \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая $\overline{\tau}$-минимальная не $\mathfrak{H}$-группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{H}}$, что $f(\sigma_i)$ – минимальная τ-замкнутая не $h(p)$-формация для всех $p \in \pi(R)$.*

Если при этом τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 3.1 вытекает следующий известный результат.

***Следствие* 3.6** [4, следствие 18.5]. *Пусть h – максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$, f – минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией в том и только в том случае, когда $\mathfrak{F} = l\mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $G^{\mathfrak{H}}$, что $f(p)$ – минимальная не $h(p)$-формация для всякого $p \in \pi(G^{\mathfrak{H}})$.*

Доказанный критерий позволяет получить описание минимальных τ-замкнутых σ-локальных не $\mathfrak{H}$-формаций для ряда конкретных формаций $\mathfrak{H}$. В качестве приложения теоремы 3.1 приведем некоторые примеры описаний $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-критических формаций для заданный формаций $\mathfrak{H}$.

Ввиду [5, замечание 2.2.12], если формация $\mathfrak{H}$ является τ-замкнутой, то в теореме 3.1 условие $\overline{\tau}$-минимальности группы G, порождающей формацию $\mathfrak{F}$, может быть заменено на условие τ-минимальности группы G.

4 Минимальные τ-замкнутые σ-локальные не $\mathfrak{G}_\Pi$-формации

Пусть $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда через $\mathfrak{G}_\Pi$ обозначают формацию всех Π-групп. Ввиду леммы 2.6 формация $\mathfrak{G}_\Pi$ σ-локальна. Понятно также, что формация $\mathfrak{G}_\Pi$ является наследственной, а значит τ-замкнутой для любого подгруппового функтора τ.

***Теорема* 4.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая σ-локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\Pi$, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой σ-локальной не $\mathfrak{G}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, где G – такая простая σ_i-группа, что $\sigma_i \notin \Pi$ и $\tau(G) = \{1, G\}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная τ-замкнутая σ-локальная не $\mathfrak{G}_\Pi$-формация, f – наименьшее τ-значное σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$ и H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{G}_\Pi$. Тогда ввиду теоремы 3.1 $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{G}_\Pi$-группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{G}_\Pi}$, что формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))_\tau$-критической для всех $\sigma_i \in \sigma(R)$.

Покажем, что выполняются условия теоремы. По лемме 2.1 (2) имеем $f(\sigma_i) = \tau\mathrm{form}(G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G))$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \notin \sigma(G)$. Ввиду леммы 2.6(1) $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_\Pi$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $H(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$.

Допустим, что группа R является σ-примарной и пусть $\sigma_i \in \sigma(R)$. Тогда R – σ_i-группа. Рассмотрим прежде случай, когда $\sigma_i \not\in \Pi$. Тогда поскольку R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $O_{\sigma_i'}(G) = 1$. Следовательно, $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G)$. Ввиду того, что $f(\sigma_i) = \tau\mathrm{form}(G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G))$ – минимальная τ-замкнутая не $H(\sigma_i)$-формация и $H(\sigma_i) = \varnothing$, имеем $f(\sigma_i) = \tau\mathrm{form}(G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G)) = (1)$. Значит, $G = O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G)$. Таким образом, G – σ_i-группа, $\sigma_i \notin \Pi$. Поскольку $G / R \in \mathfrak{G}_\Pi$ и при этом G – Π'-группа, то $G = R$. Но G – монолитическая группа. Следовательно, $G = R$ – простая σ_i-группа, где $\sigma_i \not\in \Pi$. Поскольку $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – наследственная формация, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$. В силу леммы 2.2 (4) имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поэтому $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Кроме того, поскольку G – $\overline{\tau}$-минимальная не $\mathfrak{G}_\Pi$-группа, то $\tau(G) = \{1, G\}$. Таким образом, условия теоремы выполняются.

Допустим теперь, что $\sigma_i \in \Pi$. Тогда $R \in \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $G / R \in \mathfrak{G}_\Pi$. Следовательно, $G^{\mathfrak{G}_\Pi} \subseteq R$ и $G \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_\Pi = \mathfrak{G}_\Pi$. Противоречие. Поэтому данный случай невозможен.

Пусть теперь R не является σ-примарной группой. Тогда ввиду монолитичности группы G для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) = 1$. Допустим, что найдется $\sigma_i \in \sigma(R) \setminus \Pi$. Тогда поскольку $f(\sigma_i) = \tau\mathrm{form}(G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G)) = \tau\mathrm{form} G$ – минимальная τ-замкнутая не $H(\sigma_i)$-формация и $H(\sigma_i) = \varnothing$, имеем $\tau\mathrm{form} G = (1)$. Последнее влечет

$G \simeq 1 \in \mathfrak{G}_\Pi$. Противоречие. Поэтому $\sigma(R) \subseteq \Pi$. Но тогда $R \in \mathfrak{G}_\Pi$ и, кроме того, $G/R \in \mathfrak{G}_\Pi$. Следовательно, $G \in \mathfrak{G}_\Pi \mathfrak{G}_\Pi = \mathfrak{G}_\Pi$. Противоречие. Поэтому данный случай также невозможен.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, где группа G удовлетворяет условию теоремы. Тогда поскольку $\sigma_i \notin \Pi$, то $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\Pi$. Так как в силу [12, пример 1.2 (ii)] для формации всех единичных групп имеет место $(1) = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех i, а также ввиду [12, пример 1.2 (iii)] для формации всех σ_i-групп имеет место $\mathfrak{G}_{\sigma_i} = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $f(\sigma_j) = \varnothing$ для всех $j \neq i$, то формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ имеет единственную τ-замкнутую σ-локальную подформацию (1). Так как $(1) \subseteq \mathfrak{G}_\Pi$, то $\mathfrak{F}$ – минимальная τ-замкнутая σ-локальная не $\mathfrak{G}_\Pi$-формация. □

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 4.1 получаем

***Следствие* 4.2** [6, теорема 4.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\Pi$, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{G}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_\sigma \mathrm{form} G$, где G – простая σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \notin \Pi$.*

В случае, когда $\tau = s$ – единичный подгрупповой функтор, имеем

***Следствие* 4.3**. *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная σ-локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\Pi$, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной наследственной σ-локальной не $\mathfrak{G}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_\sigma^s \mathrm{form} G$, где G – группа простого порядка $p \in \sigma_i \notin \Pi$.*

Если $\tau = s_n$, то из теоремы 4.1 получаем

***Следствие* 4.4**. *Пусть $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная σ-локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\Pi$, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является нормально наследственной минимальной σ-локальной не $\mathfrak{G}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_\sigma^{s_n} \mathrm{form} G$, где G – такая простая σ_i-группа, что $\sigma_i \notin \Pi$.*

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$, из теоремы 4.1 вытекает следующий результат.

***Следствие* 4.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\pi$, где $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{G}_\pi$-формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p = \tau^l \mathrm{form} G$, где G – группа простого порядка $p \notin \pi$.*

Если при этом τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 4.1 имеем

***Следствие* 4.6.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{G}_\pi$, где $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной не $\mathfrak{G}_\pi$-формацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p = \tau^l \mathrm{form} G$, где G – группа простого порядка $p \notin \pi$.*

5 Минимальные τ-замкнутые σ-локальные не $\mathfrak{S}_\Pi$-формации

Пусть $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Формация всех σ-разрешимых Π-групп обозначается через $\mathfrak{S}_\Pi$. Ввиду [12, замечание 2.4] $\mathfrak{S}_\Pi$ является σ-локальной формацией. Кроме того, поскольку формация $\mathfrak{S}_\Pi$ наследственная, то она является τ-замкнутой формацией для любого подгруппового функтора τ.

***Теорема* 5.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая σ-локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}_\Pi$, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой σ-локальной не $\mathfrak{S}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{S}_\Pi$-группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$G = R$ – такая простая σ_i-группа, что $\sigma_i \notin \Pi$ и $\tau(G) = \{1, G\}$;*

(2) *$|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, R – не σ-примарная Π-группа и G/R – σ-разрешимая Π-группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{S}_\Pi$-формация, f – наименьшее τ-значное σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$ и H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{S}_\Pi$. Тогда ввиду теоремы 3.1 $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{S}_\Pi$-группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\Pi}$, что формация $f(\sigma_i)$ является $(H(\sigma_i))_\tau$-критической для всех $\sigma_i \in \sigma(R)$.

Покажем, что выполняются условия теоремы. По лемме 2.1 (2) имеем $f(\sigma_i) = \tau \mathrm{form}(G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G))$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \notin \sigma(G)$. Ввиду [12, замечание 2.4] имеем $H(\sigma_i) = \mathfrak{S}_\Pi$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $H(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$.

Допустим, что R – σ-примарная группа и пусть $\sigma_i \in \sigma(R)$. Тогда R – σ_i-группа. Рассмотрим прежде случай, когда $\sigma_i \not\in \Pi$. Тогда поскольку R –

единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $O_{\sigma_i'}(G)=1$. Следовательно, $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)=O_{\sigma_i}(G)$. Поскольку $f(\sigma_i)=$ $=\tau\mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G))$ – минимальная τ-замкнутая не $H(\sigma_i)$-формация и $H(\sigma_i)=\varnothing$, то $f(\sigma_i)=$ $=\tau\mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G))=(1)$. Значит, $G=O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)=$ $=O_{\sigma_i}(G)$. Таким образом, G – σ_i-группа, $\sigma_i\notin\Pi$. Поскольку $G/R\in\mathfrak{S}_\Pi$, и при этом G – Π'-группа, то $G=R$. Но G – монолитическая группа. Следовательно, $G=R$ – простая σ_i-группа, где $\sigma_i\not\subset\Pi$. Кроме того, поскольку G – τ-минимальная не $\mathfrak{S}_\Pi$-группа, то $\tau(G)=\{1,G\}$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию (1) теоремы.

Допустим теперь, что $\sigma_i\in\Pi$. Тогда $R\in\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и $G/R\in\mathfrak{S}_\Pi$. Следовательно, $G^{\mathfrak{S}_\Pi}\subseteq R$ и $G\in\mathfrak{G}_{\sigma_i}\mathfrak{S}_\Pi=\mathfrak{S}_\Pi$. Противоречие. Поэтому данный случай невозможен.

Пусть теперь R не является σ-примарной группой. Тогда ввиду монолитичности группы G для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i}(G)=O_{\sigma_i'}(G)=1$. Поэтому $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)=1$.

Допустим, что найдется $\sigma_i\in\sigma(R)\setminus\Pi$. Тогда поскольку $f(\sigma_i)=\tau\mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G))=\tau\mathrm{form}G$ – минимальная τ-замкнутая не $H(\sigma_i)$-формация и $H(\sigma_i)=\varnothing$, то $\tau\mathrm{form}G=(1)$. Последнее влечет $G=1\in\mathfrak{S}_\Pi$. Противоречие. Поэтому $\sigma(R)\subseteq\Pi$.

Покажем также, что данный случай возможен, только если $|\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i|\geq 3$. Действительно, так как R монолит группы G, то R – прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп. Поэтому $|\pi(R)|\geq 3$. С другой стороны, поскольку R не является σ-примарной группой, то $|\sigma(R)|\geq 2$. Далее, если теперь $\sigma_i\in\sigma(R)$, то $\sigma_i\cap\pi(R)\neq\varnothing$. Следовательно, $\pi(R)\subseteq\cup_{\sigma_i\in\sigma(R)}\sigma_i$ и $|\cup_{\sigma_i\in\sigma(R)}\sigma_i|\geq 3$. Кроме того, поскольку R – Π-группа, то $\sigma(R)\subseteq\Pi$ и $\cup_{\sigma_i\in\sigma(R)}\sigma_i\subseteq\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i$. Поэтому, $|\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i|\geq 3$.

Таким образом, если R не является σ-примарной группой, то $R=G^{\mathfrak{S}_\Pi}$ – Π-группа, при этом $|\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i|\geq 3$. Следовательно, группа G удовлетворяет условию (2) теоремы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F}=l_\sigma^\tau\mathrm{form}G$ и группа G удовлетворяет условию (1) теоремы. Тогда $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – формация всех σ_i-групп и (1) – единственная τ-замкнутая σ-локальная подформация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поскольку $\sigma_i\notin\Pi$ и $(1)\subseteq\mathfrak{S}_\Pi$, то $\mathfrak{F}$ – минимальная τ-замкнутая σ-локальная не $\mathfrak{S}_\Pi$-формация.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию (2). Ясно, что $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{S}_\Pi$. Поскольку R единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)=1$. В силу леммы 2.1(2) имеем $f(\sigma_i)=\tau\mathrm{form}(G/O_{\sigma_i',\sigma_i}(G))=\tau\mathrm{form}G$ для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$. С другой стороны, так как $R=G^{\mathfrak{S}_\Pi}$ и по лемме 2.2(2) $\mathfrak{S}_\Pi$ – насыщенная формация, то $R\not\subseteq\Phi(G)$. В силу леммы 2.7 формация $\tau\mathrm{form}G=f(\sigma_i)$ имеет единственную максимальную τ-замкнутую подформацию $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X}\cup\{G/R\})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Поскольку по условию G – τ-минимальная не $\mathfrak{S}_\Pi$-группа и $G/R\in\mathfrak{S}_\Pi$, то $\mathfrak{X}\cup\{G/R\}\subseteq\mathfrak{S}_\Pi=H(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i\in\sigma(R)$. Поэтому $f(\sigma_i)$ – минимальная τ-замкнутая не $H(\sigma_i)$-формация. Значит, в силу теоремы 3.1 формация $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой σ-локальной не $\mathfrak{S}_\Pi$-формацией. □

В частности, если τ – тривиальный подгрупповой функтор из теоремы 5.1 получаем

Следствие 5.2 [6, теорема 5.1]. *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{S}_\Pi$, где $\varnothing\neq\Pi\subseteq\sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{S}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F}=l_\sigma\mathrm{form}G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R=G^{\mathfrak{S}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий:*

(1) $G=R$ *– простая σ_i-группа для некоторого $\sigma_i\notin\Pi$;*

(2) $|\cup_{\sigma_i\in\Pi}\sigma_i|\geq 3$, R *– не σ-примарная Π-группа и G/R – σ-разрешимая Π-группа.*

В случае, когда $\sigma=\sigma^1=\{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$ из теоремы 5.1 получаем следующий результат.

Следствие 5.3 *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая локальная формация, $\mathfrak{S}_\pi$ – формация всех разрешимых π-групп, где $\varnothing\neq\pi\subseteq\mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой локальной не $\mathfrak{S}_\pi$-формацией, когда $\mathfrak{F}=\tau^l\mathrm{form}G$, где G – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{S}_\pi$-группа с монолитом $R=G^{\mathfrak{S}_\pi}$, что выполняется одно из следующих условий:*

(1) *$G=R$ – группа простого порядка $p\notin\pi$;*

(2) *R – неабелева π-группа и G/R – разрешимая π-группа.*

6 Минимальные τ-замкнутые σ-локальные не σ-разрешимые формации

Группа G называется *σ-разрешимой*, если каждый главный фактор группы G является σ-примарным. Класс всех σ-разрешимых групп $\mathfrak{S}_\sigma$ является σ-локальной формацией. При этом $\mathfrak{S}_\sigma = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \mathfrak{S}_\sigma$ для всех i.

Важным частным случаем теоремы 5.1 является следующая теорема, дающая описание минимальных τ-замкнутых σ-локальных не $\mathfrak{S}_\sigma$-формаций.

***Теорема* 6.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая σ-локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{S}_\sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой σ-локальной не $\mathfrak{S}_\sigma$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая τ-минимальная не σ-разрешимая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$, что R – не σ-примарная группа и группа G/R – σ-разрешима.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная σ-локальная не $\mathfrak{S}_\sigma$-формация. Тогда, применяя теорему 5.1 при $\Pi = \sigma$ получим, что $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{S}_\sigma$-группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$, что выполняется одно из следующих условий:

(1) $G = R$ – такая простая σ_i-группа, что $\sigma_i \notin \Pi$ и $\tau(G) = \{1, G\}$;

(2) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, R – не σ-примарная П-группа и G/R – σ-разрешимая П-группа.

Поскольку $\Pi = \sigma$, то $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$. Кроме того, понятно, что условие (1) не может иметь место, а в условии (2) требование $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$ выполняется для любого разбиения σ.

Таким образом, $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая τ-минимальная не σ-разрешимая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{S}_\sigma}$, что R – не σ-примарная группа и группа G/R – σ-разрешима. □

В случае, когда τ – тривиальный подгрупповой функтор из теоремы 6.1 получаем

***Следствие* 6.2.** *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не σ-разрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая не σ-разрешимая группа с не σ-примарным монолитом P, что G/P – σ-разрешимая группа.*

***Следствие* 6.3.** *Пусть $s_n \leq \tau$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой σ-локальной не σ-разрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, где G – простая не σ-примарная группа, у которой все ее собственные τ-подгруппы σ-разрешимы.*

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, получаем следующий известный результат.

***Следствие* 6.4** [5, следствие 2.4.23]. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой локальной неразрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = \tau^l \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая τ-минимальная неразрешимая группа с неабелевым монолитом P, что G/P – разрешимая группа.*

***Следствие* 6.5.** [5, следствие 2.4.24]. *Пусть $s_n \leq \tau$. Тогда $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является минимальной τ-замкнутой локальной неразрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, где G – простая неабелева группа, у которой все ее собственные τ-подгруппы разрешимы.*

7 Минимальные τ-замкнутые σ-локальные не $\mathfrak{N}_\Pi$-формации

Пусть $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда через $\mathfrak{N}_\Pi$ обозначают формацию всех П-групп. Ввиду леммы 2.6(2) формация $\mathfrak{N}_\Pi$ является σ-локальной.

***Теорема* 7.1.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая σ-локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой σ-локальной не $\mathfrak{N}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{N}_\Pi$-группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий*:

(1) $G = R$ – простая σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \notin \Pi$ и $\tau(G) = \{1, G\}$;

(2) $G = R \rtimes K$, где $R = C_G(G)$ – p-группа, $p \in \sigma_i \in \Pi$, а K – простая σ_j-группа, $j \neq i$ и $\tau(K) = \{1, K\}$;

(3) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, $G = R$ – простая не σ-примарная τ-минимальная не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$, $\sigma(G) \subseteq \Pi$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная τ-замкнутая σ-локальная не $\mathfrak{N}_\Pi$-формация и пусть f – наименьшее τ-значное σ-локальное определение формации $\mathfrak{F}$, H – каноническое σ-локальное определение формации $\mathfrak{N}_\Pi$.

В силу теоремы 3.1 $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \mathrm{form} G$, где G – такая монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{N}_\Pi$-группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}_\Pi}$, что для всех $\sigma_i \in \sigma(R)$

формация $f(\sigma_i)$ является минимальной τ-замкнутой не $H(\sigma_i)$-формацией. По лемме 2.1 (2) имеем $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G))$ для всех $\sigma_i \in \sigma(G)$ и $f(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \notin \sigma(G)$. Ввиду леммы 2.6 (2) $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $H(\sigma_i) = \varnothing$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$.

Допустим, что группа R является σ-примарной и пусть $\sigma_i \in \sigma(R)$. Тогда R – σ_i-группа. Так как R – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то $O_{\sigma_i'}(G) = 1$. Следовательно, $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i}(G)$.

Рассмотрим случай, когда $\sigma_i \not\subseteq \Pi$. Тогда $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i}(G))$ – минимальная τ-замкнутая не $H(\sigma_i)$-формация и $H(\sigma_i) = \varnothing$. Отсюда $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i}(G)) = (1)$. Значит, G – σ_i-группа, $\sigma_i \notin \Pi$. Поскольку $G / R \in \mathfrak{N}_\Pi$ и при этом G – Π'-группа, то $G = R$. Но G – монолитическая группа. Следовательно, $G = R$ – простая σ_i-группа, где $\sigma_i \not\subseteq \Pi$. Ввиду того, что $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – наследственная формация, имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$. В силу леммы 2.2 (4) имеем $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поэтому $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Кроме того, поскольку G – τ-минимальная не $\mathfrak{N}_\Pi$-группа, то $\tau(G) = \{1, G\}$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию (1) теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда $\sigma_i \in \Pi$. Тогда $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Выберем в $f(\sigma_i) \setminus H(\sigma_i)$ группу K минимального порядка. Тогда K – монолитическая τ-минимальная не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-группа с монолитом $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i}}$. Поскольку $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i}(G)) \not\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ и любая собственная τ-замкнутая подформация из $f(\sigma_i)$ содержится в $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$, то $f(\sigma_i) = \tau\text{form} K$. Так как $R \subseteq O_{\sigma_i}(G)$ и $G / R \in \mathfrak{N}_\Pi$, то $K \in f(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{N}_\Pi$. Поэтому $Q = K$ – простая σ_j-группа для некоторого $j \neq i$ и $\tau(K) = \{1, K\}$.

Пусть $p \in \sigma_i$ и S – группа простого порядка p. По лемме 2.8 существует точный неприводимый $F_p K$-модуль V. Обозначим через $D = V \rtimes K$. Тогда $V = C_D(V)$ – единственная минимальная нормальная p-подгруппа группы D и $V = O_{\sigma_i',\sigma_i}(D) = O_{\sigma_i}(D)$.

Покажем, что $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} D$. Поскольку σ-локальное определение f является внутренним и $O_{\sigma_i}(D) = V$, то по лемме 2.4 имеем $D \in \mathfrak{F}$. Обозначим через l минимальное σ-локальное определение формации $\mathfrak{L} = l_\sigma^\tau \text{form} D$. По лемме 2.1 (2) имеет место равенство $l(\sigma_i) = \tau\text{form}(D / O_{\sigma_i',\sigma_i}(D)) = \tau\text{form} K$. Если $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{F}$, то по условию $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{N}_\Pi$. Значит, с учетом леммы 2.5, имеет место $l \leq H$. Поэтому $l(\sigma_i) = \tau\text{form} K \subseteq H(\sigma_i)$. Последнее противоречит определению группы K. Таким образом, $\mathfrak{L} = \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} D$, где группа D удовлетворяет условию (2) теоремы.

Пусть теперь R не является σ-примарной группой. Тогда ввиду монолитичности группы G для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i}(G) = O_{\sigma_i'}(G) = 1$. Поэтому $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = 1$.

Допустим, что найдется $\sigma_i \in \sigma(R) \setminus \Pi$. Тогда $f(\sigma_i) = \tau\text{form}(G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) = \tau\text{form} G$ – минимальная τ-замкнутая не $H(\sigma_i)$-формация по теореме 3.1. Так как по лемме 2.6 (2) и $H(\sigma_i) = \varnothing$, то $\tau\text{form} G = (1)$. Последнее влечет $G = 1 \in \mathfrak{N}_\Pi$. Противоречие. Поэтому $\sigma(R) \subseteq \Pi$.

Пусть $\sigma_i, \sigma_j \in \sigma(R)$, где $i \neq j$. Поскольку $f(\sigma_i) = \tau\text{form} G = f(\sigma_j)$ – минимальная τ-замкнутая не $H(\sigma_i)$-формация по теореме 3.1, то $G / R \in f(\sigma_i) \cap f(\sigma_j) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_j} = (1)$, т. е. $G = R$ – простая группа. Так как при этом все собственные τ-подгруппы группы G принадлежат $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $G = R$ – простая не σ-примарная τ-минимальная не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$.

Покажем теперь, что данный случай возможен, только если $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$. Действительно, так как G не σ-примарная группа, то G – простая неабелева группа. Поэтому $|\pi(G)| \geq 3$. С другой стороны, $|\sigma(G)| \geq 2$. Если теперь $\sigma_i \in \sigma(G)$, то $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \varnothing$. Следовательно, $\pi(G) \subseteq \cup_{\sigma_i \in \sigma(G)} \sigma_i$ и $|\cup_{\sigma_i \in \sigma(G)} \sigma_i| \geq 3$. Кроме того, поскольку G – Π-группа, то $\sigma(G) \subseteq \Pi$ и $\cup_{\sigma_i \in \sigma(G)} \sigma_i \subseteq \cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i$. Поэтому, $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$.

Таким образом, если R не является σ-примарной группой, то $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$ и $G = R$ – простая не σ-примарная τ-минимальная не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$. Следовательно, группа G удовлетворяет условию (3) теоремы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$ и группа G удовлетворяет условию (1) теоремы. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ – формация всех σ_i-групп и (1) – единственная τ-замкнутая σ-локальная подформация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$. Поскольку $\sigma_i \notin \Pi$ и $(1) \subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, то $\mathfrak{F}$ – минимальная τ-замкнутая σ-локальная не $\mathfrak{N}_\Pi$-формация.

Пусть теперь группа G удовлетворяет условию (2) теоремы. Ясно, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\Pi$. В силу леммы 2.1 (2) имеем $f(\sigma_i) = \tau\mathrm{form}(G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) = \tau\mathrm{form}K$. Согласно лемме 2.7 формация $\tau\mathrm{form}K = f(\sigma_i)$ τ-неприводима и в ней имеется единственная максимальная τ-замкнутая подформация $\mathfrak{M} = \tau\mathrm{form}(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы K. Так как при этом $\mathfrak{X} = \{1\}$, то $\mathfrak{X} \subseteq H(\sigma_i)$. Поэтому $f(\sigma_i)$ – минимальная τ-замкнутая не $H(\sigma_i)$-формация. Значит, в силу теоремы 3.1 формация $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой σ-локальной не $\mathfrak{N}_\Pi$-формацией.

Пусть, наконец, группа G удовлетворяет условию (3) теоремы. Поскольку R единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, то для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$ имеет место $O_{\sigma_i',\sigma_i}(G) = 1$. В силу леммы 2.1(2) имеем $f(\sigma_i) = \tau\mathrm{form}(G / O_{\sigma_i',\sigma_i}(G)) = \tau\mathrm{form}G$ для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$. С другой стороны, так как $R = G^{\mathfrak{N}_\Pi}$ и по лемме 2.2(2) $\mathfrak{N}_\Pi$ – насыщенная формация, то $R \not\subseteq \Phi(G)$. В силу леммы 2.7 формация $\tau\mathrm{form}G = f(\sigma_i)$ имеет единственную максимальную τ-замкнутую подформацию $\tau\mathrm{form}(\mathfrak{X} \cup \{G/R\})$, где $\mathfrak{X}$ – множество всех собственных τ-подгрупп группы G. Поскольку по условию G – τ-минимальная не $\mathfrak{N}_\Pi$-группа и $G/R \in \mathfrak{N}_\Pi$, то $\mathfrak{X} \cup \{G/R\} \subseteq \mathfrak{N}_\Pi = H(\sigma_i)$ для любого $\sigma_i \in \sigma(R)$. Поэтому $f(\sigma_i)$ – минимальная τ-замкнутая не $H(\sigma_i)$-формация. Следовательно, в силу теоремы 3.1 формация $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой σ-локальной не $\mathfrak{N}_\Pi$-формацией. □

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 7.1 получаем

***Следствие* 7.2.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – σ-локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ-локальной не $\mathfrak{N}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий*:

(1) $G = R$ *– простая σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \notin \Pi$;*

(2) $G = R \rtimes K$, *где $R = C_G(G)$ – p-группа, $p \in \sigma_i \in \Pi$, а K – простая σ_j-группа, $j \neq i$;*

(3) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, $G = R$ *– простая не σ-примарная минимальная не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$, $\sigma(G) \subseteq \Pi$.*

В случае, когда $\tau = s$ – единичный подгрупповой функтор имеем

***Следствие* 7.3.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – наследственная σ-локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной наследственной σ-локальной не $\mathfrak{N}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^s\mathrm{form}G$, где G – такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{N}_\Pi$-группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий*:

(1) $G = R$ *– простая σ_i-группа для некоторого $\sigma_i \notin \Pi$;*

(2) G *– не σ-нильпотентная* Π-*группа Шмидта*;

(3) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, $G = R$ *– простая не σ-примарная $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$, $\sigma(G) \subseteq \Pi$.*

Если $\tau = s_n$, то из теоремы 7.1 получаем

***Следствие* 7.4.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – нормально наследственная σ-локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\Pi$, где $\varnothing \neq \Pi \subseteq \sigma$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной наследственной σ-локальной не $\mathfrak{N}_\Pi$-формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^{s_n}\mathrm{form}G$, где G – такая монолитическая минимальная не $\mathfrak{N}_\Pi$-группа с монолитом $R = G^{\mathfrak{N}_\Pi}$, что выполняется одно из следующих условий:*

(1) $G = R$ *– группа простого порядка $p \in \sigma_i \notin \Pi$;*

(2) G *– не σ-нильпотентная* Π-*группа Шмидта*;

(3) $|\cup_{\sigma_i \in \Pi} \sigma_i| \geq 3$, $G = R$ *– простая не σ-примарная минимальная не $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$-группа для любого $\sigma_i \in \sigma(G)$, $\sigma(G) \subseteq \Pi$.*

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\},\{3\},\{5\},\ldots\}$, из теоремы 7.1 получаем

***Следствие* 7.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – τ-замкнутая локальная формация, $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\pi$, где $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ-замкнутой локальной не $\mathfrak{N}_\pi$-формацией, когда $\mathfrak{F} = \tau^l\mathrm{form}G$, где G одна из следующих групп:*

(1) *группа простого порядка $p \notin \pi$;*

(2) π-*группа Шмидта*;

(3) *простая неабелева* τ*-минимальная не* $\mathfrak{N}_p$*-группа для любого* $p \in \pi(G) \subseteq \pi$.

В частности, если при этом τ – тривиальный подгрупповой функтор имеет место

***Следствие* 7.6.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *– локальная формация,* $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\pi$*, где* $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$*. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является минимальной локальной не* $\mathfrak{N}_\pi$*-формацией, когда* $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$*, где G одна из следующих групп*:

(1) *группа простого порядка* $p \notin \pi$;

(2) π*-группа Шмидта;*

(3) *простая неабелева не* $\mathfrak{N}_p$*-группа для любого* $p \in \pi(G) \subseteq \pi$.

8 Минимальные τ-замкнутые σ-локальные не σ-нильпотентные формации

Напомним, что группа G называется σ-*нильпотентной*, если она является прямым произведением σ-примарных групп. Класс всех σ-нильпотентных групп $\mathfrak{N}_\sigma$ является σ-локальной формацией. При этом $\mathfrak{N}_\sigma = LF_\sigma(f)$, где $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$ для всех i.

Важным частным случаем теоремы 7.1 является следующая теорема, дающая описание минимальных τ-замкнутых σ-локальных не $\mathfrak{N}_\sigma$-формаций.

***Теорема* 8.1.** *Пусть* $\mathfrak{F}$ *–* τ*-замкнутая* σ*-локальная формация,* $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}_\sigma$*. Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является минимальной* τ*-замкнутой* σ*-локальной не* σ*-нильпотентной формацией, когда* $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau\mathrm{form}G$*, где G – такая монолитическая* τ*-минимальная не* σ*-нильпотентная группа с монолитом* $R = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$*, что выполняется одно из следующих условий*:

(1) $G = R \rtimes K$*, где* $R = C_G(G)$ *– p-группа,* $p \in \sigma_i \in \Pi$*, а K – простая* σ_j*-группа,* $j \neq i$ *и* $\tau(K) = \{1, K\}$;

(2) $G = R$ *– простая не* σ*-примарная* τ*-минимальная не* $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$*-группа для любого* $\sigma_i \in \sigma(G)$.

Если τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы 8.1 получаем

***Следствие* 8.2.** *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *является минимальной* σ*-локальной не* σ*-нильпотентной формацией, когда* $\mathfrak{F} = l_\sigma\mathrm{form}G$*, где G – либо простая не* σ*-примарная группа*, *либо не* σ*-нильпотентная группа Шмидта.*

Если $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \ldots\}$, из теоремы 8.1 вытекает

***Следствие* 8.3** [5, следствие 2.4.4]. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *– минимальная* τ*-замкнутая локальная ненильпотентная формация*, *когда* $\mathfrak{F} = \tau^l\mathrm{form}G$*, где G – либо простая неабелева* τ*-минимальная не* $\mathfrak{N}_p$*-группа для любого* $p \in \pi(G)$*, либо группа Шмидта.*

Если при этом τ – тривиальный подгрупповой функтор, то имеем

***Следствие* 8.4** [2]. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ *– минимальная локальная ненильпотентная формация*, *когда* $\mathfrak{F} = l\mathrm{form}G$*, где G – либо простая неабелева группа*, *либо группа Шмидта.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеметков*, *Л.А.* Экраны ступенчатых формаций / Л.А. Шеметков // Труды VI Всесоюзного симпозиум по теории групп. – Киев: Наукова думка. – 1980. – С. 37–50.

2. *Скиба*, *А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.

3. *Скиба*, *А.Н.* О критических формациях / А.Н. Скиба // В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Ин-т математики АН Украины. – 1993. – С. 258–268.

4. *Шеметков*, *Л.А.* Формации алгебраических систем / Л.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – Москва: Наука, 1989.

5. *Скиба*, *А.Н.* Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мінск: Бел. навука, 1997.

6. *Сафонова*, *И.Н.* О минимальных σ-локальных не-$\mathfrak{H}$-формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 105–112.

7. *Сафонова*, *И.Н.* О критических σ-локальных формациях конечных групп / И.Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 63–80.

8. *Сафонова*, *И.Н.* К теории $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$-критических формаций конечных групп / И.Н. Сафонова, В.В. Скрундь // Международная конференция «Алгебра и динамические системы», посвященная 90-летию со дня рождения В.А. Белоногова, Нальчик, 3–7 июня 2025 г. – Нальчик: Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, 2025. – С. 137–140.

9. *Skiba*, *A.N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

10. *Skiba*, *A.N.* On one generalization of the local formations / A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 1 (34). – P. 79–82.

11. *Chi*, *Z.* On one application of the theory of n-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2018. – № 2 (35). – P. 85–88.

12. *Chi*, *Z.* On *n*-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V.G. Safonov, A.N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.

13. *Safonova*, *I.N.* On some properties of the lattice of totally σ-local formations of finite groups / I.N. Safonova, V.G. Safonov // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. – 2020. – № 3. – С. 1–14.

14. *Safonova*, *I.N.* Some properties of *n*-multiply σ-local formations of finite groups / I.N. Safonova // Asian-European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 15, № 7. – 2250138 (12 pages).

15. *Safonova*, *I.N.* A criterion for σ-locality of a non-empty formation / I.N. Safonova // Comm. Algebra. – 2022. – № 50 (6). – P. 2366–2376.

16. *Safonova*, *I.N.* On the τ-closedness of *n*-multiply σ-local formation / I.N. Safonova // Advances in Group Theory and Applications. – 2024. – № 18. – P. 123–136.

17. *Сафонова*, *И.Н.* О *n*-кратной σ-локальности непустой τ-замкнутой формации конечных групп / И.Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, № 1. – С. 32–38.

18. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – Минск: Наука, 1978. – 271 с.

Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «*Конвергенция* – 2025» *при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь* (*проект* 20211328).

Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение статьи и полезные предложения.

Поступила в редакцию 23.06.2025.

Информация об авторах

Сафонова Инна Николаевна – к.ф.-м.н., доцент

Скрундь Валентина Викторовна – аспирант