

А. Я. АЛЕКСАНДРОВ

**РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ  
УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ ПУТЕМ  
ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 18 IV 1972)

Основные трехмерные задачи теории упругости могут быть сведены к системам интегральных или функциональных уравнений (<sup>1-3</sup>). Существование и единственность решения доказываются для краевых задач достаточно общего вида. Однако решение полученных уравнений связано со значительными трудностями.

В настоящей работе излагается способ решения смешанной и других основных трехмерных задач для тел произвольной формы путем численной реализации метода интегральных уравнений без использования этих уравнений в явном виде. Для решения систем линейных алгебраических уравнений, к которым сводятся задачи, дается итерационный алгоритм, связанный с выделением главной части. Доказывается сходимость процесса и на примерах показывается его эффективность. Изложение ведется применительно к случаю изотропного и однородного тела, затем указываются возможности некоторых обобщений.

Пусть заданное тело занимает некоторую одно- или многосвязную трехмерную область  $\Omega$ , ограниченную одной или несколькими поверхностями  $S$ , на которых заданы нагрузки или смещения в соответствии с корректной постановкой трехмерной задачи. Будем считать, что область  $\Omega$  является частью сплошного упругого пространства, внутри которого по  $S$  действуют некоторые неизвестные распределенные нагрузки  $q$ . Требуется найти такие значения  $q$ , при которых будут выполнены заданные условия на  $S$ .

Используя фундаментальное решение для сосредоточенной силы в упругом пространстве, найдем напряжения и смещения от совокупности нагрузок  $q$ . Разобьем все поверхности  $S$  на  $n$  достаточно малых участков и будем полагать, что в пределах каждого из этих участков  $q = \text{const}$ . Напряжения в некоторой точке  $k_s$  запишем в виде

$$\sigma_{ij}(k_s) = \sum_{r=1}^n \sum_{l=1}^3 \bar{\sigma}_{ij}^{(l)}(k_s, k_r) q_r^{(l)}; \quad (1)$$

здесь  $i, j, l$  — индексы, принимающие значения 1, 2, 3, которые соответствуют направлениям  $x, y, z$  в декартовой системе координат;  $\bar{\sigma}_{ij}^{(l)}(k_s, k_r)$  — напряжения в точке  $k_s$  при действии на  $r$ -м участке единичных нагрузок по направлению  $l$ ,  $q_r^{(l)}$  — неизвестные нагрузки, действующие на  $r$ -м участке по направлению  $l$ .

В аналогичной форме запишем выражения смещений. Если в области  $\Omega$ , включая  $S$ , действуют сосредоточенные силы, то в правую часть (1) следует добавить соответствующие слагаемые.

Напряжения  $\sigma_{ij}^{(j)}(k_s, k_s)$  будем находить интегрированием по поверхности  $s$ -го участка. Если точка  $k$  лежит на этой поверхности, то в выра-

изменения напряжений вызывают особенности, связанные с сингулярным характером подинтегральных выражений. Исследуем эти особенности обычными путями. Рассмотрим точку  $k$ , расположенную вне  $S$  вблизи точки  $k_s$ , лежащей на  $S$  и не совпадающей с границей участка. Интегралы по участку представим в виде сумм интегралов по малой окрестности  $k_s$  и интегралов по остальной поверхности участка. Устремляя  $k$  к  $k_s$  и переходя к пределу найдем, что напряжения определяются суммой интегралов в смысле главного значения и слагаемых  $\sigma_{ij}^*$ , связанных с указанными сингулярностями:

$$\begin{aligned} \sigma_{1'1'}^* &= \pm \frac{1}{2} q_{1'}, & \sigma_{2'2'}^* = \sigma_{3'3'}^* &= \pm \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} q_{1'}, \\ \sigma_{1'2'}^* &= \pm \frac{1}{2} q_{2'}, & \sigma_{1'3'}^* &= \pm \frac{1}{2} q_{3'}, & \sigma_{2'3'}^* &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

здесь  $1', 2', 3'$  — локальная система координат,  $1'$  — направление нормали к  $S$ ,  $2'$  и  $3'$  — взаимно ортогональные направления в  $S$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона. Выбор знака определяется направлением приближения к  $S$ . В выражениях компонент смещений слагаемые, аналогичные (2), отсутствуют.

Таким образом, для точек, лежащих на  $S$ , члены выражений (1), соответствующие  $s = r$ , содержат слагаемые (2).

Взаимно вычленив значения интегралов по поверхности участка в смысле главного значения определяются напряжения и смещения от сосредоточенных сил, эквивалентных распределенной нагрузке. Согласно полученным оценкам, напряжение в точке  $k_s$ , расположенной в центре прямоугольного участка, можно найти как сумму напряжений, полученных по формулам (2), и напряжений от равнодействующих нагрузок  $q_s^{(i)}$ , примененных в центрах четырех одинаковых прямоугольников, образующих заданный участок и имеющих  $k_s$  своей общей вершиной.

При использовании выражений (1) краевые условия дают систему линейных уравнений для  $q_r^{(i)}$ . Определив  $q_r^{(i)}$ , можно далее найти напряжения и смещения в  $\Omega$ .

Метод, близкий к описанному, был реализован для решения плоских и трехмерных осесимметричных задач в [4, 5]. Однако при решении трехмерной задачи на поверхности  $S$  приходится разбивать на столь большое число участков, что эффективность такого подхода требует специального приема решения систем уравнений, к которым сводятся задачи.

Перепишем выражения (2) в виде

$$\sigma_{ij}(k) = \sum_{l=1}^s \bar{\sigma}_{ij}^{(l)}(k, k_s) q_s^{(l)} + \eta \sum_{r=1}^n \sum_{l=1}^s \bar{\sigma}_{ij}^{(l)}(k, k_s) q_r^{(l)}, \quad (3)$$

причем  $l = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, n$ .

В аналогичной форме запишем выражения для перемещений.

Первое слагаемое в правых частях выражений (3) представляет напряжения в точке  $k_s$ , лежащей на  $s$ -м участке, от нагрузок, приложенных на этом же участке. Будем полагать, что это главный член напряжений. Отметим, что применительно к смещениям такое предположение аналогично гипотезе Виглера, используемой в теории конструкций, лежащих на упругом основании. Введенный здесь коэффициент  $\eta$  в окончательном решении задачи должен быть равен единице.

Выражения (3) введем в краевые условия задачи и в первом приближении примем  $\eta = 0$ . Тогда система уравнений распадется на независимые группы из трех уравнений с тремя неизвестными для каждого участка ( $s$  при определенном выборе формы участка — на независимых уравнениях с одним неизвестным). Разрешив эти системы, найдем неизвестные значения  $q_r^{(i)}$ . Во втором приближении перенесем слагаемые, содержащие множитель  $\eta$ , в правую часть соответствующих уравнений и введем

в них значения  $q_r^{(l)}$ , найденные из предшествующего приближения. При этом система уравнений вновь распадется так же, как и при первом приближении. Итерационный процесс оказывается сходящимся как при построении последовательности решений для значений  $0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_n = 1$ , так и в том случае, если после 1-го приближения ( $\eta = 0$ ) сразу принять  $\eta = 1$ .

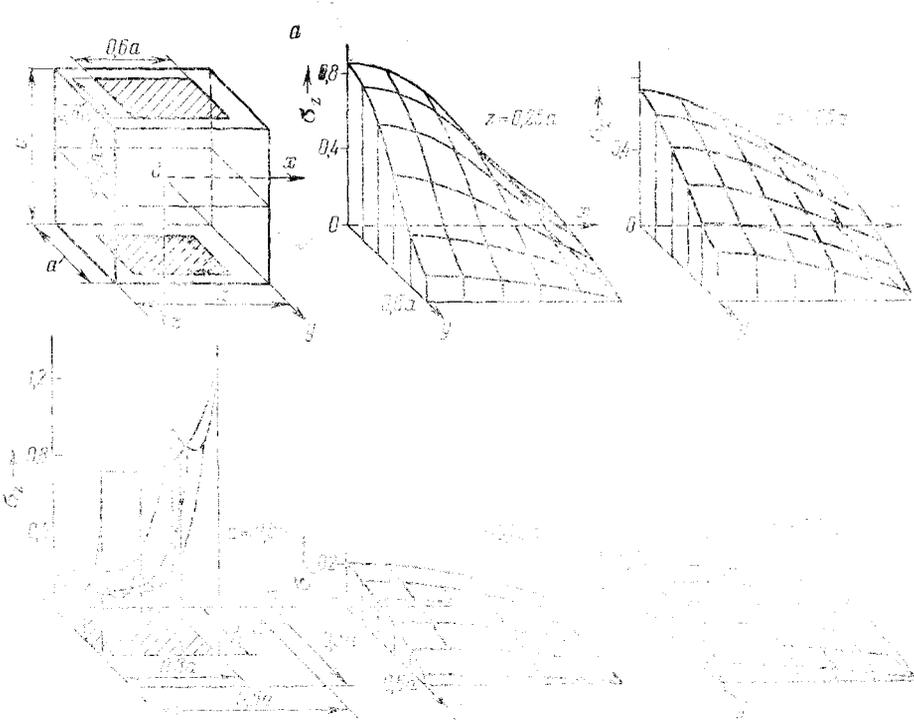


Рис. 1

Рассмотрим вопрос о сходимости процесса для случая второй основной задачи. В этом случае в каждой точке  $k$  заданы три смещения  $u_\alpha^{(l)}$  и уравнения задачи можно представить в виде

$$u_\alpha = \sum_{\beta=1}^{3n} \bar{u}_{\alpha\beta} q_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, 3n. \quad (4)$$

Заметим, что в силу взаимности перемещений матрица  $\bar{u}_{\alpha\beta}$  симметрична. Умножим левую и правую части (4) на  $q_\alpha$  и просуммируем по  $\alpha$ :

$$\sum_{\alpha=1}^{3n} u_\alpha q_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3n} \sum_{\beta=1}^{3n} \bar{u}_{\alpha\beta} q_\beta q_\alpha. \quad (5)$$

Левая часть (5) — это удвоенная работа при нагружении пространства силами  $q_\alpha$ . Отсюда следует положительная определенность матрицы  $\bar{u}_{\alpha\beta}$ . Как известно, это достаточное условие сходимости итерационного процесса Зейделя ( $\epsilon^{-s}$ ).

Очевидно, что описанный метод решения можно использовать и для задач, связанных с контактом нескольких упругих тел. В этом случае каждому из тел ставится в соответствие своя бесконечная область, нагруженная своими  $q$ . Эти  $q$  — свои для каждого тела — связываются уравнениями, общими для всей системы тел. Метод можно также применить для случая анизотропных тел, если использовать соответствующие фундаментальные решения для сосредоточенной силы.

В качестве примера на рис. 1 приводятся результаты решения, полученные описанным методом для двух случаев нагружения куба. В одном случае заштрихованные квадратные площадки двух граней куба были нагружены равномерно распределенной сжимающей нагрузкой  $Q_z$ , в другом — действием жестких штампов, нагруженных силами, действующими вдоль оси  $z$ , при отсутствии трения. На диаграммах показано распределение напряжений в некоторых сечениях куба, верхний ряд (а) относится к первому нагружению, нижний (б) — ко второму.

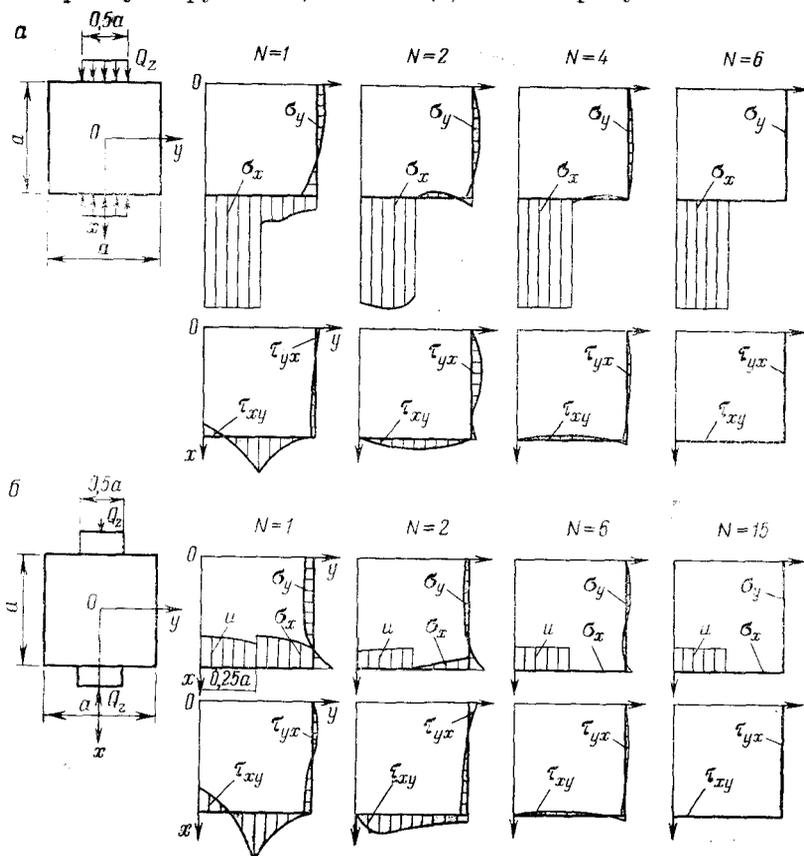


Рис. 2

На рис. 2 для двух аналогичных плоских задач (а, б) показано распределение напряжений и смещений на контуре квадратной пластинки в зависимости от номера  $N$  итерации. Благодаря выделению главной части, уже первое приближение в значительной мере схватывает характер окончательного решения.

Во всех случаях в первом приближении принималось  $\eta = 0$ , во всех остальных  $\eta = 1$ . При решении задач по рис. 1 число неизвестных было 150, по рис. 2 — 40.

Новосибирский институт инженеров  
железнодорожного транспорта  
Новосибирск

Поступило  
31 III 1972

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. П. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, «Наука», 1966. <sup>2</sup> В. Д. Купрадзе, Методы потенциала в теории упругости, М., 1963. <sup>3</sup> Д. И. Шерман, Тр. Всесоюз. съезда по теоретич. и прикл. мех., АН СССР, стр. 405, 1961. <sup>4</sup> А. Я. Александров, Тр. Новосибирск. инст. инж. ж. д. транспорта, в. 11, 5 (1955). <sup>5</sup> А. Я. Александров, там же, стр. 29. <sup>6</sup> E. Reich, Ann. Math. Statistics, 20 (1949). <sup>7</sup> W. Schmeidler, Vortrage über Determinanten u. Matrizen mit Anwendungen in Physik u. Technik, Berlin, 1949. <sup>8</sup> A. M. Ostrowski, Rend. mat. e appl., 14, № 1—2 (1954).