Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 4

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Г. АСЛАНЯН, В. Н. ТУЛОВСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 3 III 1972)

1. Определение частот тонкой упругой оболочки, защемленной на границе, приводит к следующей задаче на собственные значения:

$$\sum_{j=1}^{3}\left(L_{ij}+\frac{h^2}{12}N_{ij}\right)u_j=\lambda u_i,\quad i=1,2,3, \tag{1}$$

$$u_1|_\Gamma=u_2|_\Gamma=u_3|_\Gamma=\partial u_3/\partial n|_\Gamma=0. \tag{2}$$

Здесь u_i — компоненты вектора смещения точки срединной поверхности; L_{ij} и N_{ij} — дифференциальные операторы (см. ([1], [2])):

$$L_{11}u_1=-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}Bu_1-\frac{1-\sigma}{2}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}Au_1-(1-\sigma)\frac{u_1}{R_1R_2},$$

$$L_{12}u_2=-\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}Au_2+\frac{1-\sigma}{2}\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}Bu_2,$$

$$L_{13}u_3=\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)u_3\right]-\frac{(1-\sigma)}{AR_2}\frac{\partial u_3}{\partial\alpha},$$

$$L_{21}u_1=-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}Bu_1+\frac{1-\sigma}{2}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}Au_1,$$

$$L_{22}u_2=-\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}Au_2-\frac{1-\sigma}{2}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}Bu_2-\frac{1-\sigma}{R_1R_2}u_2,$$

$$L_{23}u_3=\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)u_3\right]-\frac{1-\sigma}{BR_1}\frac{\partial}{\partial\beta}u_3,$$

$$L_{32}u_2=-\frac{1}{AB}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial}{\partial\beta}Au_2+\frac{1-\sigma}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{R_1}u_2,$$

$$L_{31}u_1=-\frac{1}{AB}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}Bu_1+\frac{1-\sigma}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{R_2}u_1,$$

$$L_{33}u_3=\left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{2\sigma}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right)u_3,$$

$$N_{33}u_3=\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)u_3\text{*};$$

Γ — граница оболочки; λ — спектральный параметр, константой отличающийся от квадрата собственной частоты; h — малый параметр — толщина оболочки; $R_1^{-1}(\alpha,\beta)$, $R_2^{-1}(\alpha,\beta)$ — главные кривизны срединной поверхности; $A(\alpha,\beta)$, $B(\alpha,\beta)$ — коэффициенты Ламе (предполагается, что срединная поверхность отнесена к линиям кривизны); σ — коэффициент Пуассона.

Задача (1), (2) является самосопряженной и имеет положительный дискретный спектр. Пусть $n(\lambda)$ — соответствующая функция распределения собственных значений. В настоящей статье в развитие работы ([11]) доказывается в случае произвольной оболочки следующее предложение.

* Выражения для остальных операторов N_{ij} мы не приводим. Они содержат дифференцирования меньших порядков и в дальнейшем оказываются несущественными.

Теорема. *При фиксированном $\lambda > 0$ и $\mu \to 0$ справедлива асимптотическая формула* *

$$n_\mu(\lambda) = \frac{1}{8\pi^2\mu^2}\left[\iint\limits_{(G)}\int\limits_0^{2\pi} \mathrm{Re}\sqrt{\lambda - \Omega(\theta, \alpha, \beta)}\, d\theta\, dS + O(\mu^\gamma)\right]; \tag{3}$$

в формуле (3)

$$\Omega(\theta, \alpha, \beta) = (1 - \sigma^2)\,[R_1^{-1}(\alpha, \beta)\sin^2\theta + R_2^{-1}(\alpha, \beta)\cos^2\theta]^2, \tag{4}$$

$dS = A(\alpha, \beta)\cdot B(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$ — *элемент площади поверхности оболочки*, $\gamma > 0$ **, *а постоянная в O-члене не зависит от λ при $\lambda \leqslant \lambda_0$.*

Отметим, что внутренний интеграл, приводимый в формуле (3), был указан в связи с распределением собственных частот пологих оболочек в статье В. В. Болотина ([3]); в случае оболочек вращения формула для плотности, аналогичная (3), была получена при некоторых дополнительных ограничениях П. Е. Товстиком ([4]). Укажем в заключение, что родственная задача рассматривается в квантовой механике (см. ([10])).

2. Для доказательства теоремы используется следующая лемма, обобщающая классический вариационный принцип ([5]).

Лемма 1. *Пусть A — ограниченный снизу самосопряженный оператор с областью определения $D(A)$. Число собственных значений оператора A, меньших t, равно максимальной размерности линейных подпространств $D \subseteq D(A)$, на которых выполнено неравенство*

$$(A\bar{u}, u) < t(u, u), \quad u \in D. \tag{5}$$

Доказательство этой леммы см. в ([6]), стр. 31.

Пусть G — область изменения параметров (α, β). Для простоты будем считать, что G — прямоугольник. Разобьем G на квадраты Q_j со стороной Δ. В каждом квадрате Q_j выберем точку (α_j, β_j). Нам понадобится

Лемма 2. *Для любой вектор-функции $f = (u_1, u_2, u_3)$, удовлетворяющей условиям* (2) *на границе квадрата Q_j, имеет место оценка*

$$(1 - C\Delta)\ ((L_{0,j} + \mu^4 N_{0,j})f, f) \leqslant ((L + \mu^4 N)f, f) \leqslant$$
$$\leqslant (1 + C\Delta)\,((L_{0,j} + \mu^4 N_{0,j})f, f), \tag{6}$$

где C — некоторая не зависящая от f и j положительная константа, а $L_{0,j}$ и $N_{0,j}$ — операторы с постоянными коэффициентами, которые получаются «замораживанием» коэффициентов квадратичной формы оператора $L + \mu^4 N$.

Пусть теперь $n_j^0(\lambda)$ — функция распределения собственных значений оператора $L_{0,j} + \mu^4 N_{0,j}$ с условиями типа (2) на границе квадрата Q_j. Учитывая лемму 2, нетрудно доказать неравенство $\sum\limits_j n_j^0(\lambda(1 - C\Delta)) \leqslant n(\lambda)$. Используя результат статьи ([7]), можно заменить в последнем неравенстве функции $n_j^0(\lambda)$ эффективно вычисляемыми функциями распределения $n_j^*(\lambda)$ задачи для оператора $L_{0,j} + \mu^4 N_{0,j}$ с периодическими граничными условиями. В результате мы приходим к неравенству

$$\sum_j [n_j^*(\lambda(1 - C\Delta)) + O(\Delta\mu^{-1})] \leqslant n(\lambda), \tag{7}$$

содержащему оценку для $n(\lambda)$ снизу.

3. Получение оценки сверху для функции $n(\lambda)$ вызывает известные сложности. Дело в том, что используемая обычно для этой цели функция распределения задачи Неймана трудно оценивается, а ее связь с функци-

* Мы полагаем $h^2 / 12 = \mu^4$.

** По поводу остаточного члена см. Замечание 1.

ей распределения периодической задачи недостаточно изучена. Ниже используется идея перекрытых клеток, принадлежащая второму из авторов (см. ([8])). Каждый квадрат Q_j заменим бо́льшим квадратом $\widetilde{Q}_j$ с тем же центром и стороной $\Delta+\delta$, $0<\delta\ll\Delta$. Введем в рассмотрение семейство функций $\psi_j(\alpha,\beta)$ таких, что

$$\psi_j(\alpha,\beta)\in C_0^\infty(\widetilde{Q}_j),\quad \left|\frac{\partial^k\psi_j}{\partial\alpha^{k_1}\partial\beta^{k_2}}\right|\leqslant C\delta^{-k},\quad k=1,2,3,4; \tag{8}$$

$$\sum_j\psi_j^2(\alpha,\beta)\equiv 1,\quad (\alpha,\beta)\in G. \tag{9}$$

Построение такого семейства проводится стандартным способом (см. например, ([9])).

Нетрудно далее установить следующие неравенства:

$$(Nf,f)\geqslant\sum_j(Nf\psi_j,f\psi_j)-C\delta^{-2}\mu^2(Nf,f)-C(\delta^{-4}+\delta^{-2}\mu^{-2})\|u_3\|^2, \tag{10}$$

$$(Lf,f)\geqslant\sum_j(Lf\psi_j,f\psi_j)-C\delta^{-2}(\|u_1\|^2+\|u_2\|^2). \tag{11}$$

Из неравенств (10) и (11) с использованием леммы 2 вытекает следующее предположение.

Лемма 3. *Для любой гладкой вектор-функции f, удовлетворяющей граничным условиям* (2) *и неравенству*

$$((L+\mu^4N)f,\ f)<\lambda(f,\ f), \tag{12}$$

справедливо неравенство

$$\sum_j((L_{0,j}+\mu^4N_{0,j})f\psi_j,f\psi_j)-C\delta^{-2}(\|u_1\psi_j\|^2+\|u_2\psi_j\|^2)<\lambda^*\sum_j(f\psi_j,f\psi_j), \tag{13}$$

где

$$\lambda^*=\lambda+C\mu^4(\delta^{-4}+\delta^{-2}\mu^{-2})+C\Delta. \tag{14}$$

Из лемм 1 и 3 следует важное неравенство

$$n(\lambda)\leqslant\sum_j\tilde{n}_j^0(\lambda^*), \tag{15}$$

где $\tilde{n}_j^0(\lambda)$ — функция распределения задачи.

$$(L_{0,j}+\mu^4N_{0,j}-C\delta^{-2}T)f=\lambda f \tag{16}$$

при граничных условиях типа (2) на сторонах квадрата $\widetilde{Q}_j$, а T — диагональная матрица: $T=\operatorname{diag}(1,1,0)$.

Из неравенства (15) следует оценка

$$n(\lambda)\leqslant\sum_j\tilde{n}_j^*(\lambda^*), \tag{17}$$

где через $\tilde{n}_j^*(\lambda)$ обозначена функция распределения задачи (16) с периодическими граничными условиями на сторонах квадрата $\widetilde{Q}_j$.

4. Функции распределения $n_j^*(\lambda)$ и $\tilde{n}_j^*(\lambda)$ могут быть оценены, так же как и в ([11]), поскольку соответствующие задачи явно решаются в экспонентах. Подсчет целых точек в областях, аналогичных рассмотренным в ([11]), приводит к следующим оценкам:

$$n(\lambda)\geqslant\frac{1}{8\pi^2\mu^2}\iint\limits_{(G)}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}\sqrt{\lambda(1-C\Delta)-\Omega(\theta,\alpha,\beta)}\,d\theta\,dS+O(\mu^{-3/2})+O(\mu^{-1}\Delta^{-1}), \tag{18}$$

$$n(\lambda)\leqslant\frac{1}{8\pi^2\mu^2}\left[\iint\limits_{(G)}\int\limits_0^{2\pi}\operatorname{Re}\sqrt{\lambda^*-\Omega(\theta,\alpha,\beta)}\,d\theta\,dS+O\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)+O\left(\frac{\mu}{\delta}\right)^{1/2}+O\left(\frac{\mu}{\Delta}\right)\right], \tag{19}$$

Интегралы, стоящие в правых частях (18) и (19), отличаются от интеграла в (3) на $O(\Delta^{1/2})$ и $O((\lambda^* - \lambda)^{1/2})$ соответственно.

Полагая здесь $\Delta = \mu^{2/5}$, $\delta = \mu^{3/5}$, приходим к формуле (3), составляющей цель настоящей статьи, с $\gamma = 1/5$.

Замечание 1. Если сходится интеграл

$$\iint_{(G)} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(\lambda - \Omega(\theta, \alpha, \beta))^{-1/2} d\theta\, dS, \tag{20}$$

то, полагая $\Delta = \mu^{1/4}$, $\delta = \mu^{1/2}$, получаем формулу (3) с $\gamma = 1/4$.

Замечание 2. Формула (3) сохраняется при любых самосопряженных граничных условиях, если только соответствующий квадратичный функционал совпадает с квадратичным функционалом $((L + \mu^4 N)f, f)$ задачи (1), (2).

Авторы выражают признательность В. Б. Лидскому, по инициативе которого выполнено это исследование, и выражают благодарность А. Л. Гольденвейзеру, П. Е. Товстику и Г. Н. Чернышеву за многочисленные обсуждения и советы.

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
24 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Л. Гольденвейзер, УМН, 15, в. 5 (1960). [2] В. З. Власов, Общая теория оболочек и ее приложения в технике, 1949, стр. 297. [3] В. В. Болотин, ПММ, 27, в. 2 (1963). [4] П. Е. Товстик, ПММ, 36, № 2 (1972). [5] Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, М.—Л., 1951. [6] И. М. Глазман, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963. [7] В. Н. Туловский, Функциональный анализ и его приложения, 5, в. 3, 85 (1971). [8] В. Н. Туловский, ДАН, 206, № 4 (1972). [9] Л Хермандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965. [10] М. Ш. Бирман, В. В. Борзов, Проблемы математической физики, Л., в. 5, 1971. [11] А. Г. Асланян, В. Б. Лидский, Изв. АН АрмССР, 7, № 4, 1972.