Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 1

УДК 550.83.015

ГЕОФИЗИКА

Г. Г. РЕМПЕЛЬ

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ МАГНИТОРАЗВЕДКИ

(Представлено академиком М. А. Садовским 12 IV 1972)

Глубина залегания верхней и нижней кромок намагниченного тела являются теми главнейшими параметрами, которые в первую очередь стремятся определить при интерпретации магнитных аномалий. В связи с этим представляет интерес оценка максимальной величины магнитной аномалии, которая порождается однородно намагниченным телом, целиком расположенным между уровнями глубин h_1 (верхняя кромка) и h_2 (нижняя кромка).

Не теряя общности, предположим, что вертикальная составляющая вектора намагничения направлена вниз. Полагая, что магнитная восприимчивость невелика и фактором размагничивания можно пренебречь, запишем выражение вертикальной составляющей напряженности магнитного поля, которое создается в точке (x, z) двумерным намагниченным телом S:

$$Z(x, z) = 2\int\limits_L J_n(\xi)\frac{\zeta(\xi) - z}{[\zeta(\xi) - z]^2 + (\xi - x)^2}\,dl, \tag{1}$$

где L — контур тела, $\zeta(\xi)$ — функция которая его описывает, $J_n(\xi)$ — нормальная составляющая вектора намагничения J.

Обозначив через k тангенс угла наклона вектора намагничения, после некоторых преобразований (1) получаем следующее выражение:

$$Z(x, z) = \frac{2J}{\sqrt{k^2+1}}\int\limits_L \frac{[k - \zeta(\xi)]\,[\zeta(\xi) - z]}{[\zeta(\xi) - z]^2 + (\xi - x)^2}\,d\xi. \tag{2}$$

Для определения формы тела, создающего наибольшую аномалию, необходимо решить соответствующую вариационную задачу. Найдем функцию $\zeta(\xi)$, которая обеспечивает максимум функционала (2). Решив приводимое ниже уравнение Эйлера — Лагранжа

$$F_\zeta - \frac{d}{d\xi}\,F_{\zeta'} = 0,$$

где F — подынтегральная функция в (2), а F_ζ и $F_{\zeta'}$ — ее производные соответственно по ζ и ζ', получаем

$$\zeta_1(\xi) = \frac{\xi - x}{k}\left(-1 + \sqrt{1 + k^2}\right) + z, \tag{3}$$

$$\zeta_2(\xi) = \frac{\xi - x}{k}\left(-1 - \sqrt{1 + k^2}\right) + z. \tag{4}$$

Нетрудно заметить, что $\zeta_1(\xi)$ и $\zeta_2(\xi)$ являются уравнениями прямых линий, проходящих через точку (x, z) и пересекающихся под прямым углом (см. рис. 1). Поскольку рассматривается двумерный случай, эти линии являются проекциями плоскостей. Последние ограничивают с боков тело, создающее наибольшую по сравнению с другими телами аномалию Z в точке (x, z) при одинаковых с этими телами верхней и нижней кромках. К подобному же выводу приводит рассмотрение палетки Д. С. Микова [1]. Остается установить форму верхней и нижней кромок искомого тела, которое в дальнейшем будем называть экстремальным.

Учитывая постановку задачи и то, что любое тело, например S_1, помещенное внутри двугранного угла, образованного плоскостями $\zeta_1(\xi)$ и $\zeta_2(\xi)$, порождает в точке (x, z) положительную аномалию, приходим к выводу, что верхняя и нижняя кромки экстремального тела горизонтальные и находятся соответственно на уровнях h_1 и h_2 (см. рис. 1).

После интегрирования (2) по найденному контуру получаем

$$Z(x, z) = 2J \ln(h_2 / h_1). \tag{5}$$

Отсюда следует: каково бы ни было однородно намагниченное двумерное тело, заключенное целиком между уровнями глубин h_1 (верхняя кромка)

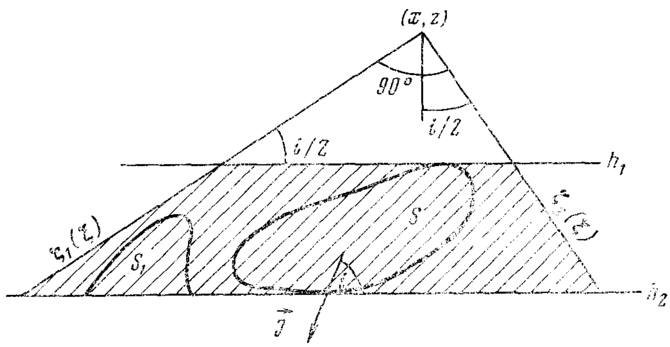

Рис. 1. Тело, создающее максимальную аномалию в точке (x, z) при заданных $\vec{J}$, h_1, h_2 (заштриховано)

и h_2 (нижняя кромка), имеет место неравенство

$$|Z|_{\max} \leqslant 2|J| \ln (h_2 / h_1). \tag{6}$$

Заметим, что в неравенстве (6) не фигурирует угол намагничения. Подчеркнем также, что оно неулучшаемо при малых $\varkappa$.

Полученное неравенство в некотором смысле подобно известному неравенству гравиразведки

$$|\Delta g|_{\max} \leqslant 2\pi f |\sigma| (h_2 - h_1), \tag{7}$$

где f — гравитационная постоянная, σ — контраст плотности. Однако область возможного практического применения неравенства (6) существенно шире, чем неравенства (7), так как последнее превращается в равенство только для экстремальных тел неограниченного сечения, а первое при всех направлениях намагничения, кроме горизонтального, превращается в равенство для соответствующих тел конечного сечения.

Неравенство (6) можно представить в иной форме:

$$h_2 \geqslant h_1 \exp \frac{|Z|_{\max}}{2|J|}. \tag{8}$$

Так оно более рельефно отражает соотношение между параметрами намагниченного тела и максимумом аномалии и интенсивностью намагничения.

В трехмерном случае аналогом выражения (6) является следующее неравенство:

$$|Z|_{\max} \leqslant f(i) |J| \ln(h_2 / h_1), \tag{9}$$

где i — угол между направлением намагничения и горизонтальной плоскостью, а $f(i)$ — некоторая довольно сложная функция, монотонно возрастающая от 2 до $4\pi / (3\sqrt{3}) = 2{,}4184$ при изменении i от 0 до 90°.

Трехмерное экстремальное тело сверху и снизу ограничено соответственно плоскостями $\zeta = h_1$ и $\zeta = h_2$, а с боков — поверхностью эллиптического конуса, вырождающегося в круговой при $i = 90°$. Уравнение конической поверхности в полярных координатах выражается так:

$$\zeta(\rho, \varphi) = \rho \frac{-3\cos\varphi + \sqrt{9\cos^2\varphi + 8\,\mathrm{tg}^2\, i}}{4\,\mathrm{tg}\, i}. \qquad (10)$$

Изменение формы экстремальной поверхности (конуса) в связи с изменением направления намагничения является обстоятельством, не фигурирующим в двумерном случае. Отсюда непосредственно следует, что в трехмерном случае, в отличие от двумерного, невозможно построить единую палетку для решения прямой задачи магниторазведки при различных направлениях намагничения.

Сибирский научно-исследовательский институт
геологии, геофизики и минерального сырья
Новосибирск

Поступило
1 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. С. Миков, Атлас теоретических кривых для интерпретации магнитных и гравитационных аномалий, Томск, 1955. [2] Г. Г. Ремпель, Геология и геофизика, № 6 (1965).