Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 1

УДК 517.949.8 *МАТЕМАТИКА*

С. И. СЕРДЮКОВА

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 7 IV 1972)

Исследуется устойчивость разностной аппроксимации:

$$\begin{gathered} v_\nu(t+\tau)=\sum_{j=-r_1}^{r_2} A_j v_{\nu+j}(t), \quad t=n\tau\geqslant 0, \quad \nu=1,2,\ldots, \\ v_\nu(0)=f_\nu, \quad v_m(t)=\sum_{j=1}^{s} C_{jm}v_j(t), \quad m=-r+1,\ldots,0; \end{gathered} \tag{1}$$

$v_\nu(t)$ — векторы размерности k, A_j, C_{jm} — постоянные матрицы. Предполагается, что A_{-r}, A_p — невырожденные матрицы. Обозначим через $\mathscr{H}$ гильбертово пространство последовательностей векторов

$$v=\{v_{-r+1},\ldots,v_0,v_1,\ldots\}, \quad v_m=-\sum_{j=1}^{s} C_{jm}v_j, \quad m=-r+1,\ldots,0,$$

с нормой

$$\|v\|^2=\sum_{\nu=1}^{\infty}|v_\nu|^2.$$

Разностная аппроксимация (1) устойчива, если существует постоянная c, не зависящая от τ такая, что $\|v(t)\|\leqslant c\|v(0)\|$ для $t=n\tau\geqslant 0$ и всех $v(0)\subset\mathscr{H}$.

Запишем (1) в операторном виде $v(t+\tau)=Gv(t)$. z_0 называется точкой спектра оператора G, если существует ненулевая последовательность $v\subset\mathscr{H}$ такая, что $Gv=z_0v$. Для того чтобы (1) была устойчива, необходимо ([1]), чтобы спектр G лежал в единичном круге $|z|\leqslant 1$. Чтобы получить необходимое и достаточное условие устойчивости (1), оценим скорость роста $\|G^n\|$:

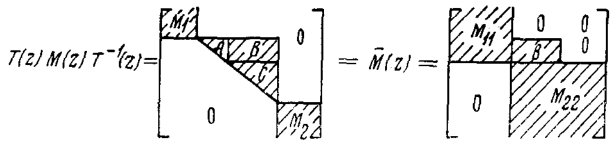
$$G^n=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma z^n(G-zI)^{-1}dz,$$

где Γ — произвольный контур, охватывающий все точки спектра оператора G. Следуя ([1]), получим явное представление резольвенты $(G-zI)^{-1}$ в окрестности единичной окружности $|z|=1$. При этом появляется (см. ([1])) матрица $M(z)$:

$$M(z)=-\begin{bmatrix} A_{r_2}^{-1}A_{r_2-1} & A_{r_2}^{-1}A_{r_2-2} & \ldots & A_{r_2}^{-1}(A_0-zI) & \ldots & A_{r_2}^{-1}A_{-r_1+1} & A_{r_2}^{-1}A_{-r_1} \\ -I & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -I & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & \ldots & . & \ldots & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & . & \ldots & -I & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя ([2], [3]), доказываем следующую теорему.

Теорема 1. *Для произвольной точки единичной окружности* z_0, $|z_0| = 1$, *найдутся постоянная* ρ *и несингулярная аналитическая в круге* $|z - z_0| < \rho$ *матрица* $T(z)$ *такая, что*



Элементы T, T^{-1} разлагаются в ряды по дробным степеням $(z - z_0)$. Собственные значения (с.з.) M_1, M_2^{-1} по модулю строго меньше 1 при $|z - z_0| < \rho$. С.з. A, C^{-1} по модулю меньше 1 для $|z| > 1$ и стремятся к предельным значениям, равным по модулю 1 при $z \to z_0$. M_{11} имеет размерность (rk, rk), M_{22} — (r_1k, r_1k), A — (l_1, l_1), C — (l_2, l_2).

В окрестности z_0 резольвента дается формулами

$$w_j^{\mathrm{I}} = \sum_{\nu=1}^{j-1} M_{11}^{j-\nu-1} \bar{g}_\nu + M_{11}^{j-1} w_1^{\mathrm{I}}, \qquad \bar{g}_\nu = (Tg_\nu)^{\mathrm{I}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} w_\nu^{\mathrm{II}},$$

$$w_j^{\mathrm{II}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} M_{22}^{j-\nu-1} (Tg_\nu)^{\mathrm{II}};$$

w_j^{I} — векторы размерности rk (см. ([1])), w_1^{I} определяется из соотношения

$$K_1(z) w_1^{\mathrm{I}} = K_2(z) w_1^{\mathrm{II}} + \sum_{\nu+r_1}^{s} (B_\nu^{\mathrm{I}}(z) \bar{g}_\nu + B_\nu^{\mathrm{II}}(z) (Tg_\nu)^{\mathrm{II}}).$$

Матрицы K_1, K_2, B_ν^{I}, B_ν^{II} зависят от C_{jm}, M, T (см. ([4])). $K_1(z)$ может вырождаться в отдельных точках единичной окружности. Необходимое и достаточное условие устойчивости (1) сводится к ряду ограничений на поведение K_1, K_2, A, C в окрестности этих точек.

В ([1]) показано, что точки вырождения K_1 являются точками спектра или обобщенными точками спектра ([1]) G. Собственные значения $\varkappa$ матрицы $M(z)$ удовлетворяют уравнению

$$\mathrm{Det}\left(\sum_{j=-r_1}^{r_2} A_j \varkappa^j - zI \right) = 0.$$

Отсюда следует, что с.з. $M(z)$ являются обратными функциями с.з. характеристической матрицы задачи Коши. В ([5]) показано, что устойчивость задачи Коши является необходимым условием устойчивости краевых задач. Известны ([6]) разложения с.з. характеристической матрицы L_2-устойчивой задачи Коши в окрестности определяющих точек:

$$\lambda = \exp\left\{ i\varphi_0 + i\gamma(\psi - \psi_0) + i \sum_{j=p}^{2\mu} \alpha_j (\psi - \psi_0)^j - \beta (\psi - \psi_0)^{2\mu} + \ldots \right\},$$
$$\operatorname{Im} \alpha_j = 0, \quad \beta > 0.$$

Если $|\lambda| \equiv 1$ при $|\exp(i\psi)| = 1$, то $\mu = \infty$.

Каждому λ с наклонной характеристикой $(\gamma \neq 0)$ отвечает одно $\varkappa$:

$$\varkappa = \exp\left\{ i\psi_0 + i \frac{\varphi - \varphi_0}{\gamma} P(\varphi - \varphi_0) + \frac{\beta}{\gamma^{2\mu+1}} (\varphi - \varphi_0)^{2\mu} + \ldots \right\}, \quad z = e^{i\varphi}. \tag{2a}$$

Каждому λ с вертикальной характеристикой ($\gamma=0$) на плоскости с разрезом по радиусу $z=te^{i\varphi_0}$, $0\leqslant t\leqslant 1$, отвечает p ветвей $\varkappa$:

$$\varkappa_l=\exp\left\{i\psi_0+i\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{\alpha}\right)_l^{1/p}P\left(\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{\alpha}\right)_l^{1/p}\right)+\frac{\beta}{\alpha p}\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{\alpha}\right)_l^{(2\mu-p+1)/p}+\ldots\right\},$$
$$\alpha=\alpha_p, \tag{2б}$$
$$\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{\alpha}\right)_l^{1/p}=\left|\frac{\varphi-\varphi_0}{\alpha}\right|^{1/p}\exp\left(\frac{i}{p}(\chi-\operatorname{Arg}\alpha+2\pi l)\right),$$
$$-\frac{3\pi}{2}\leqslant\chi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad l=0,\ldots,p-1.$$

На единичной окружности в окрестности $z_0=e^{i\varphi_0}$ каждое $\varkappa$ по модулю либо не больше 1, либо не меньше 1. Порядок старшего члена разложения (2), гарантирующего такое поведение $\varkappa$, назовем определяющим порядком $\varkappa$ и обозначим его через Q: λ с $\gamma\neq 0$ порождает $\varkappa$ с $Q=2\mu$; λ с $\gamma=0$ и $p=2\mu$ порождает $\varkappa_l$ с $Q=1/p$ для всех $l=0,\ldots,p-1$; λ с $\gamma=0$ и $p<2\mu$ отвечают две основные ветви с номерами $l=0$, $[p+{}^1\!/_2]$. Этим ветвям отвечает $Q=(2\mu-p+1)/p$. Для остальных ветвей $Q=1/p$. Кроме того, каждому $\varkappa$ поставим в соответствие число P: $P={}^1\!/_2$, если $\varkappa$ типа (2а), и $P=1-(1/(2p))$ в противном случае. Обозначим через q_{ij} порядок нуля функции $\ln\varkappa_i-\ln\varkappa_j$ при $\varphi=\varphi_0$. Пусть $\gamma_i\leqslant 0$ и $\gamma_j\leqslant 0$, тогда $\varkappa_i$, $\varkappa_j$ принадлежат одному классу, если $Q_i=Q_j=Q$ и $q_{ij}>Q$. Все $\varkappa$ с $\gamma>0$ объединим в один класс.

Теорема 2. *Если задача Коши устойчива, то порядки нулей внедиагональных элементов a_{ij} матрицы A при $\varphi=\varphi_0$ не меньше n_{ij}:*

1) *$\varkappa_i$, $\varkappa_j$ из разных классов; тогда $n_{ij}=q_{ij}$;*

2) *$\varkappa_i$, $\varkappa_j$ из одного класса, $\gamma\leqslant 0$; тогда $n_{ij}=Q$;*

3) *$\varkappa_i$, $\varkappa_j$ из одного класса, $\gamma>0$; тогда, если $q_{ij}=2\mu=\infty$, то $a_{ij}\equiv 0$ $(n_{ij}=\infty)$, в противном случае $n_{ij}=1$.*

Следствие. В окрестности $\varphi=\varphi_0$ существует невырожденное аналитическое преобразование подобия, которое позволяет избавиться в A от a_{ij}, отвечающих с.з. из разных классов, и от a_{ij}, отвечающих с.з. с различными приходящими характеристиками ($\gamma>0$). Тем самым A может быть приведена к блочно-диагональному виду. Каждому классу с.з. отвечает свой треугольный блок. Аналогичное утверждение справедливо для матрицы C^{-1}.

В дальнейшем предполагается, что матрицы A, C^{-1} приведены к указанному блочно-диагональному виду и краевые матрицы K_1, K_2 построены с учетом соответствующего преобразования подобия.

Обозначим через z_0^* точки единичной окружности $|z|=1$, в которых вырождается матрица $K_1(z)$. Далее обозначим через D диагональную матрицу с диагональными элементами $d_i=(z-z_0^*)^{-P_i}$, где $P_i=P$, P отвечает i-му с.з. матрицы C^{-1}. Наконец, обозначим через s_i^1 максимальный порядок особенностей элементов (r_1k-l_1+i)-й строки матрицы K_1^{-1} и через s_i^2 — максимальный порядок особенностей элементов (r_1k-l_1+i)-й строки матрицы K_2^*:

$$K_2^*(z)=K_1^{-1}(z)\left(K_2(z)-\sum_{\nu=r_1}^{s}B_\nu^{\mathrm{I}}(z)\begin{pmatrix}0&0\\B&0\end{pmatrix}M_{22}^{\nu-1}(z)\right)\begin{pmatrix}I&0\\0&D\end{pmatrix}.$$

Основная теорема. *Для того чтобы (1) была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия 1)—5):*

1) *должна быть устойчива соответствующая задача Коши;*

2) *спектр G должен лежать в единичном круге $|z|\leqslant 1$ (каждой точке z_0^* отвечают матрицы K_1, K_2^*, A. Эти матрицы должны удовлетворять условиям 3)—5). (В пунктах 4)—5) через $\varkappa_i$ обозначено i-о с. з. матрицы A и через P_i — отвечающее $\varkappa_i$ число P);*

3) *матрицы* K_1^{-1}, K_2^* *не должны иметь особенностей выше первого порядка в верхних* $r_1k - l_1$ *строках*;

4) *для* $\varkappa_i$ *с* $\gamma < 0$ *и* $\varkappa_i$ *с* $\gamma = 0$ *и* $Q > 1/p$ $s_i^1 < P_i$; *для остальных* $\varkappa_i$ $s_i^1 \leqslant P_i$;

5) $s_i^2 \leqslant P_i$.

Если нарушается условие 3) и максимальный порядок особенностей элементов верхних $r_1k - l_1$ строк матриц K_1^{-1}, K_2^* равен $q > 1$, то $\|G^n\| > cn^{q-1}$. Здесь и ниже c не зависит от n. Если $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant l_1} ((s_i^1 - P_i), (s_i^2 - P_i)) = \theta > 0$, то $\|G^n\| > cn^\theta$. Если $\theta = 0$ и максимум достигается на одном из $\varkappa_i$, указанных в первом предложении п. 4), то $\|G^n\| > c(\ln n)^{1/2}$. Все оценки являются точными по порядку. В целом имеет место неустойчивость максимального порядка.

Частично результаты этой работы пересекаются с результатами работы (7).

Объединенный институт ядерных исследований
Дубна

Поступило
14 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H.-O. Kreiss, Math. Comp., 22, № 104, 703 (1968). [2] T. Kato, Perturbation Theory for Linear Operators, Ch. 2, Berlin — Heidelberg — N. Y., 1966. [3] В. Я. Урм, ДАН, 134, № 6, 1309 (1960). [4] С. И. Сердюкова, ДАН, 200, № 1, 39 (1971). [5] H.-O. Kreiss, Proc. Adv. Sympos., Madison, Wis., 1966, N. Y., 1966, MR 35-5156, p. 141. [6] В. Я. Урм, ДАН, 139, № 1, 40 (1961). [7] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, A. Sundström, Stability Theory of Difference Approximations for Mixed Initial Boundary Value Problems. II. Uppsala University Department of Computer Sciences, Report № 30, January, 1971.