Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 1

УДК 519.53

МАТЕМАТИКА

Э. Р. СМОЛЬЯКОВ

ОБОБЩЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И БЕСКОНЕЧНЫЕ АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ЗАВИСИМЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ИГРОКОВ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 12 IV 1972)

В работе изложены начала теории игр с зависимыми стратегиями игроков, представляющих собой некоторое обобщение игр, рассматривавшихся в работах ([1–7]).

Пусть игрок u выбирает вектор-функцию $u(t) = \{u^1(t), \ldots, u^m(t)\}$ таким образом, чтобы минимизировать функционал

$$J = \int_{t_0}^{T} f_0(y, u, v, t)\,dt + \Phi(y^0, t_0, y^T, T), \tag{1}$$

а игрок v выбором вектор-функции $v(t) = \{v^1(t), \ldots, v^r(t)\}$ стремится максимизировать J, причем удовлетворяются следующие ограничения:

$$\dot{y}_i = f_i(y, u, v, t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

$$g_j(y, u, v, t) \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, q, \tag{3}$$

$$\theta(y, t) \geqslant 0, \tag{4}$$

$$G_k(y^0, t_0, y^T, T) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{5}$$

где $y^0 = y(t_0)$, $y^T = y(T)$, а t_0 и T, вообще говоря, не фиксированы.

Чтобы не загромождать выкладок, взято только одно ограничение вида (4). Пусть $d^h\theta / dt^h \equiv g_0(y, u, v, t)$ — наименьшая производная, содержащая хотя бы одну компоненту вектора $\{u, v\}$. В общем виде игры (1)—(5) могут иметь смысл лишь как игры с дискриминацией вследствие того, что некоторые или все компоненты векторов u и v, согласно (3), (4), могут быть зависимыми.

Пусть функции $f_i(y, u, v, t)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $g_j(y, u, v, t)$, $j = 0, 1, \ldots, q$, непрерывно дифференцируемы по y, u, v в некоторой открытой области $S \supset B(y, u, v, t)$ (через B обозначено замкнутое множество в пространстве $\{y, u, v, t\}$, заданное условиями (3), (4) при $t \in (t_0, T)$), измеримы в смысле Лебега на (t_0, T) и $|f_i| \leqslant C_i(t)$, $|g_j| \leqslant C_{n+j}(t)$, где $C_k(t)$ — интегрируемые по Лебегу функции на (t_0, T).

Следует заметить, что часть полученных в работе результатов справедлива при существенном ослаблении этих требований.

Введем в рассмотрение производящую функцию $\varphi(u, t)$ меры $\varphi(U', t)$, определенной при каждом t на σ-алгебре подмножеств U' открытого множества $S_u \supset U'$, где S_u — произвольное открытое фиксированное множество в пространстве $\{u\}$, содержащее при любых $y(t)$, t множество $U(y(t), t)$, являющееся (при любом t) проекций $(m + r)$-мерного множества $D(y(t), t) = \{u, v\} \cap B$ на пространство $\{u\}$. Аналогично вводятся функция $\psi(v, t)$, мера $\psi(V', t)$ и множества S_v и $V(y(t), t)$. Мера $\chi = (\psi\varphi)$ определена при каждом t на подмножествах открытого множества S в пространстве $\{u, v\}$, причем почти всюду на (t_0, T) $\int_D d\chi = 1$, $\int_{S/D} d\chi = 0$, где интегралы берутся в смысле Лебега — Стилтьеса.

Наряду с определенными выше мерами φ и ψ, будем рассматривать еще случай, когда производящие функции этих мер (и сами меры) могут быть представлены в виде

$$\varphi(u,t)=\prod_{i=1}^{m}\varphi_i(u^i,t),\qquad \psi(v,t)=\prod_{k=1}^{r}\psi_k(v^k,t). \tag{A}$$

Замечание 1. Если существуют только кратные интегралы вида $\iint(\cdot)\,d(\psi\varphi)$, но не существует ни один из повторных интегралов вида $\int\left[\int(\cdot)\,d\varphi\right]d\psi$ или $\int\left[\int(\cdot)\,d\psi\right]d\varphi$, где меры φ и ψ определены на подмножествах пространств $\{u\}$ и $\{v\}$ соответственно, то, по-видимому, говорить об антагонистической игре вряд ли имеет смысл. Представление (A) означает не что иное, как возможность выражения двойных интегралов через повторные, например, вида $\int\left\{\int\left[\cdots\int(\cdot)\,d\psi_r\cdots\right]d\varphi_2\right\}d\varphi_1$; причем в этих интегралах в общем случае «независимой» (т. е. соответствующей частному распределению) является только одна из мер φ_i или ψ_k (например, в приведенном повторном интеграле «независимой» является мера φ_1, а меры $\varphi_2,\varphi_3,\ldots,\psi_r$ соответствуют условным распределениям). Полученные в работе необходимые условия «очень слабого» экстремума доказаны в предположении существования повторных интегралов по мерам φ_i и ψ_k; все остальные результаты (в частности, необходимые условия (7)—(12)) справедливы в любом случае.

Обозначим через $[u_0^i(y,t),\ u_1^i(y,t)]$ и $[v_0^k(y,t),\ v_1^k(y,t)]$ наименьшие замкнутые интервалы, удовлетворяющие включениям

$$[u_0^i(y,t),u_1^i(y,t)]\supseteq U_i(y,t),\qquad i=1,2,\ldots,m,$$
$$[v_0^k(y,t),v_1^k(y,t)]\supseteq V_k(y,t),\qquad k=1,2,\ldots,r,$$

и введем еще следующие обозначения: $\varphi^i=\varphi_1\ldots\varphi_{i-1}\varphi_{i+1}\ldots\varphi_m$, $\psi^k=\psi_1\ldots\psi_{k-1}\psi_{k+1}\ldots\varphi_r$; D_{u^i} — сечение множества D плотностью $u^i=\mathrm{const}$, $u_0^i\leqslant u^i\leqslant u_1^i$, $i=1,2,\ldots,m$; $D_u=D\cap\{v\}$; аналогично определяются D_v и D_{v^k}, $k=1,2,\ldots,r$.

Замечание 2. Будем говорить, что игра имеет решение в смысле седловой точки, если

$$\min_{\varphi}\max_{\psi}\int_U\Bigg(\int\limits_{\substack{\cap D_u\\ u\in P_u}}J\,d\psi\Bigg)d\varphi=\max_{\psi}\min_{\varphi}\int_V\Bigg(\int\limits_{\substack{\cap D_v\\ v\in P_v}}J\,d\varphi\Bigg)d\psi, \tag{6}$$

где P_u — носитель меры φ.

Решение в смысле (6), очевидно, существует, если одновременно удовлетворяются следующие два условия: 1) вспомогательная игра, полученная заменой в игре (1)—(5) множества D на множество $U\times V$ имеет решение в смысле (6), 2) носитель P экстремальной χ-меры вспомогательной игры содержится внутри D. В общем случае решение в смысле седловой точки может не существовать в стратегиях любого класса. Но тогда можно искать решение с некоторой дискриминацией в смысле

$$\min_{\varphi}\max_{\psi}\Bigg(\int_U\int\limits_{\substack{\cap D_u\\ u\in P_u}}J\,d\psi\Bigg)d\varphi=J_1,\quad \max_{\psi}\min_{\varphi}\int_V\Bigg(\int\limits_{\substack{\cap D_v\\ v\in P_v}}J\,d\varphi\Bigg)d\psi=J_2; \tag{6a}$$
$$\min_{\varphi}\max_{\psi}\int_U\Bigg(\int_{D_u}J\,d\psi\Bigg)d\varphi=\bar J_1,\quad \max_{\psi}\min_{\varphi}\int_V\Bigg(\int_{D_v}J\,d\varphi\Bigg)d\psi=\bar J_2,$$

где J_1 и J_2 соответствуют случаю, когда один из игроков знает только функцию распределения противника, а $\bar J_1$ и $\bar J_2$ — случаю, когда один из игроков знает реализацию случайных чисел (т. е. случайных значений управления) противника.

Антагонистические игры, имеющие решение в смысле (6а), назовем играми в смысле «доминирующего» значения платы: к таким играм относятся следующие типы игр с дискриминацией: I) игроку, определяющему свое поведение вторым, известна (в каждый момент) функция распределения противника, но обоим игрокам не известна реализация случайных чисел своих и противника; II) игрокам известны реализации своих случайных чисел, а второму игроку известна еще и реализация случайных чисел противника; III) игрокам известны реализации своих случайных чисел, а второму игроку известна еще и функция распределения противника.

Замечание 3. Если реальная система, моделью которой является задача (1)—(5), такова, что управление ею может производиться только при последовательном выборе (в произвольном порядке) управляющих воздействий $u^1, u^2, \ldots, u^m$ и соответственно управляющих воздействий $v^1, v^2, \ldots, v^r$, то меры φ и ψ (или их производящие функции) могут задаваться только в виде (А). В этом случае три указанных типа игр оказываются принципиально различными, если размерность D больше двух.

Необходимые условия слабого экстремума, справедливые на любых экстремалях, определяются уравнениями (7)—(11):

$$\dot{\lambda}_i = -\iint (\lambda f - \mu g)'_{y_i}\, d\psi\, d\varphi, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где $\lambda f = \sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k f_k$ ($\lambda_0 = \mathrm{const} \leqslant 0$), $\mu g = \sum\limits_{i=0}^{q} \mu_i g_i$ и вектор-функция $\lambda(t)$ всюду на экстремали при любом $t \in (t_0, T)$ непрерывна (здесь и всюду ниже интегрирование производится по множеству D, если область интегрирования не указана);

$$\iint \mu_j g_j\, d\psi\, d\varphi = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, q; \tag{8}$$

$$\theta \frac{d^h \mu_0}{dt^h} = 0, \qquad \frac{d\mu_0}{dt} = -\nu_1, \qquad \frac{d\nu_{k-1}}{dt} = -\nu_k, \qquad k = 2, 3, \ldots, (h-1); \tag{9}$$

$$\begin{gathered}(\theta \nu_{h-1})^{t_0} = 0, \quad \nu_i(t_0) = \mu_0(t_0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, (h-2);\\ \mu_0(T) = \rho_0, \quad \nu_i(T) = \rho_i, \quad i = 1, 2, \ldots, (h-1);\\ \lambda_i(t_0) = Q'_{y_i^0}, \quad -\lambda_i(T) = Q'_{y_i^T}, \quad i = 1, 2, \ldots, n;\\ -\left[\mathcal{H} - \sum_{k=1}^{h-1} \nu_k \frac{d^{h-k}\theta}{dt^{h-k}}\right]^{t_0} = Q'_{t_0}, \quad \left[\mathcal{H} - \sum_{k=1}^{h-1} \nu_k \frac{d^{h-k}\theta}{dt^{h-k}}\right]^{T} = Q'_T,\end{gathered} \tag{10}$$

где ρ_i — произвольные постоянные, $\mathcal{H} = \iint (\lambda f - \mu g)\, d\psi\, d\varphi$,

$$Q = -\lambda_0 \Phi + \sum_{k=1}^{p} l_k G_k - \left[\sum_{k=1}^{h} \frac{d^{h-k}\theta}{dt^{h-k}} \rho_{k-1}\right]^T.$$

В точках t_1 «входа» экстремали на границу области (4) и точках t_2 «схода» с нее выполняются соотношения

$$[\mathcal{H}]^{t_1-0} = \left[\iint \lambda f\, d\psi\, d\varphi\right]^{t_1+0}, \quad [\mathcal{H}]^{t_2+0} = \left[\iint \lambda f\, d\psi\, d\varphi\right]^{t_2-0}; \tag{11}$$

если же имеются изолированные точки t', общие с границей, то в них выполняется условие $[\mathcal{H}]^{t'-0} = [\mathcal{H}]^{t'+0}$.

Замечание 4. Условия (7)—(11) справедливы при любом числе выходов экстремали на границу области (4). Причем они останутся справедливыми, если условия непрерывной дифференцируемости функций f_i и g по u и v заменить условием $(\psi\varphi)$-измеримости и ограниченности их.

Если задача имеет решение в смысле «доминирующего» значения платы, то условия оптимальности следующие:

$$\max_{\bar\varphi}\min_{\bar\psi}\mathcal{H}(\bar\varphi,\bar\psi)=\mathcal{H}_1(\varphi,\psi),\quad \min_{\bar\psi}\max_{\bar\varphi}\mathcal{H}(\bar\psi,\bar\varphi)=\mathcal{H}_2(\psi,\varphi),\tag{12}$$

где $\mathcal{H}_1(\varphi,\psi)\neq\mathcal{H}_2(\psi,\varphi)$ и порядок интегрирования по мерам φ и ψ различен и строго фиксирован. В случае существования решения в смысле (6) имеет место равенство $\mathcal{H}_1=\mathcal{H}_2$.

Если игра, сформулированная в замечании 3, имеет решение как игра с дискриминацией типа I), то экстремальные поведения игроков могут быть найдены с помощью следующей симметричной системы необходимых условий «очень слабого» экстремума:

$$[L_{u^i}]_{\bar u_0^i}^{\bar u_1^i}=0,\quad \bar u_0^i,\ \bar u_1^i\in[u_0^i,u_1^i],\quad i=1,2,\ldots,m,\tag{13}$$

$$[L_{u^i}]_{u^i}'=0,\quad u^i\in[\hat u_0^i,\hat u_1^i]\subseteq[u_0^i,u_1^i],\quad i=1,2,\ldots,m,\tag{14}$$

где $L_{u^i}=\iint\limits_{W_{u^i}\subset D_{u^i}}(\lambda f-\mu g)\,d\psi d\varphi\quad \left(D\supset W\supset P=\prod\limits_{i=1}^m P_{u^i}\times\prod\limits_{v=1}^r P_{v^k}\right)$, и аналогичной системы уравнений для 2-го игрока.

Следующая несимметричная система представляет необходимые условия «очень слабого» экстремума для задачи с дискриминацией типа II):

$$\begin{aligned}&[L_{u^1}]_{\bar u_0^1}^{\bar u_1^1}=0,\quad \bar u_0^1,\bar u_1^1\in\Pi p_{u^1}D,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&[\lambda f-\mu g]_{\bar v_0^r}^{\bar v_1^r}=0,\quad \bar v_0^r,\bar v_1^r\in\Pi p_{v^r}D_{uv^1\ldots v^{r-1}},\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}&[L_{u^1}]_{u^1}'=0,\quad u^1\in[\hat u_0^1,\hat u_1^1]\subseteq\Pi p_{u^1}D,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&[\lambda f-\mu g]_{v^r}'=0,\quad v^r\in[\hat v_0^r,\hat v_1^r]\subseteq\Pi p_{v^r}D_{uv^1\ldots v^{r-1}},\end{aligned}\tag{16}$$

где

$$L_{u^1}=\iint\limits_{D_{u^1}}(\lambda f-\mu g)\,d\psi\,d\varphi_m\ldots d\varphi_2,\ldots$$

Замечание 5. Условия «очень слабого» экстремума для задачи с дискриминацией типа III) или для игр, имеющих решения в смысле (6), легко написать, исходя из уравнений (13)–(16), если учесть, что носитель P_v меры ψ удовлетворяет включению $P_v\subseteq\bigcap\limits_{P_u}D_u$, причем $P_v\times P_u=P\subset D$.

Замечание 6. Полагая в необходимых условиях (7)–(16) $\mu_0(t)\equiv y_i(t)\equiv\lambda_i(t)\equiv0$, $i=1,2,\ldots,n$, $l_k=0$, $k=1,2,\ldots,p$, $\rho_j=0$, $j=0,1,\ldots,(h-1)$, получим эффективные условия для определения как абсолютно непрерывных, так и дискретных мер, определяющих оптимальные стратегии в бесконечных играх с платой $f_0(u,v)$.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
20 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Красовский, ДАН, **193**, № 2, 284 (1970). [2] Н. Н. Красовский, А. И. Субботин, ДАН, **196**, № 2 (1971). [3] Ю. С. Осипов, Задачи теории дифференциально-разностных игр, Докторская диссертация, ЛГУ, 1971. [4] Р. П. Федоренко, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., **10**, № 5 (1970). [5] Э. Р. Смольяков, ДАН, **191**, № 1, 39 (1970). [6] А. И. Сотсков, Кибернетика, № 4 (1969). [7] Ю. Н. Желнин, ДАН, **199**, № 1, 44 (1971).