Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 4

УДК 519.45 *МАТЕМАТИКА*

В. Г. ВАСИЛЬЕВ

О РАЗРЕШИМЫХ ЭЛЕМЕНТАРНО ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ГРУППАХ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 11 V 1972)

В работе рассматриваются некоторые вопросы вложения элементарно эквивалентных групп и строится пример класса мощности континуум элементарно неэквивалентных двупорожденных групп, центры которых изоморфны группе порядка два, а фактор-группы по центрам — дискретному сплетению двух бесконечных циклических групп.

Группу будем рассматривать как алгебраическую систему сигнатуры $\langle \cdot, ^{-1}, =, e\rangle$. Под формулой будем иметь в виду формулу 1-й ступени ПИП ([1]) именно в этой сигнатуре.

1. Определение 1. Две группы элементарно эквивалентны, если всякая замкнутая формула, истинная на одной из этих групп, истинна и на другой.

Тот факт, что группа G порождается множеством X, обозначим через $G=\langle X\rangle$. Пусть $G=\langle g_1,\ldots,g_n\rangle$.

Определение 2. Формулу $\mathscr{A}(x_1,\ldots,x_n)$ с n свободными переменными назовем формульным предикатом вложения для группы G (или группа G обладает формульным предикатом вложения $\mathscr{A}(x_1,\ldots$ $\ldots,x_n))$, если $\mathscr{A}(g_1,\ldots,g_n)$ истинна на G и для всякой группы H, элементарно эквивалентной группе G, и любого набора элементов $h_1,\ldots,h_n$ из H такого, что $\mathscr{A}(h_1,\ldots,h_n)$ истинна на H, отображение $g_i\to h_i$, $i=1,\ldots,n$, может быть продолжено до изоморфизма группы G в группу H.

Отметим, что из истинности замкнутой формулы $\exists x_1\ldots x_n(\mathscr{A}(x_1,\ldots$ $\ldots,x_n))$ на группах G и H следует существование элементов $h_1,\ldots,h_n$ из H таких, что $\mathscr{A}(h_1,\ldots,h_n)$ истинна на H.

Конечная группа G, очевидно, обладает формульным предикатом вложения (см., например, ([1]), стр. 252).

Теорема 1. *Если в конечно-определимой группе G формульная конечно-определимая подгруппа A и фактор-группа G/A обладают формульными предикатами вложения, то и группа G обладает формульным предикатом вложения.*

Доказательство. $A=\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$, $G/A=\langle b_1A,\ldots,b_mA\rangle$. $\mathscr{A}(x_1,\ldots,x_n)$ и $\mathscr{B}(y_1,\ldots,y_m)$ — формульные предикаты вложения для групп A и G/A соответственно. Пусть $\mathscr{A}_1(x_1,\ldots,x_n)$ и $\mathscr{B}_2(y_1,\ldots,y_m)$ — формулы с условием

$$\mathscr{A}_1(a_1,\ldots,a_n)\overset{G}{=}u\Leftrightarrow\mathscr{A}(a_1,\ldots,a_n)\overset{A}{=}u,$$

$$\mathscr{B}_2(b_1,\ldots,b_m)\overset{G}{=}u\Leftrightarrow\mathscr{B}(b_1A,\ldots,b_mA)\overset{G/A}{=}u.$$

Запись $\mathscr{F}\overset{G}{=}u$ означает, что значение формулы $\mathscr{F}$ на группе G равно истине.

Тогда формула

$$(\mathscr{A}_1(x_1,\ldots,x_n)\,\&\,\mathscr{B}_2(y_1,\ldots,y_m)\mathop{\&}_{i=1}^{k}f_i(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m))$$

будет формульным предикатом вложения для G, где $f_i(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots$ $\ldots,b_m)$, $i=1,\ldots,k$, — конечная система определяющих соотношений группы $G=\langle a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m\rangle$ именно для этой системы образующих.

Следствие 1. *Конечное расширение полициклической группы обладает формульным предикатом вложения.*

Если группа задана бесконечной системой определяющих соотношений, то, естественно, возникают трудности в отыскании формульного предиката вложения для этой группы. Но, как покажет дальнейшее изложение, эти трудности иногда можно обойти.

2. Как обычно, будем обозначать G' — коммутант, $Z(G)$ — центр группы G. $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$, $[a_1, \dots, a_n] = [[a_1, \dots, a_{n-1}], a_n]$.

Рассмотрим двупорожденную группу H (пример этой группы взят из [2]):

$$H = \langle a, b\rangle$$

с определяющими соотношениями

$$[a_i, a_j, a_k] = 1, \quad [a_i, a_j, b^n] = 1, \tag{1}$$

где $a_i = b^{-i}ab^i$; $i, j, k, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Пусть $A = \langle \dots, a_{-n}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\rangle$, тогда $H/A \cong B = \langle b\rangle$, $H' \subseteq A$, и коммутант A' группы A является центром группы H, A — метабелева;

$$[a_i, a_j] = [a_{i+k}, a_{j+k}], \quad i, j, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$Z(H) = \langle c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\rangle,$$

где $c_i = [a_0, a_i]$, $i = 1, 2, \dots$

Теперь следующим образом определим класс групп W_2. Пусть P — множество всех простых чисел, больших двух, $S(P)$ — множество всех бесконечных, собственных, различных подмножеств множества P. Рассмотрим разбиение α множества натуральных чисел $N = \{1, 2, \dots\}$ на два подмножества N_α, $N_{\alpha'}$ таких, что $N_\alpha \cup N_{\alpha'} = N$, $N_\alpha \cap N_{\alpha'} = \phi$, $N_\alpha \in S(P)$. К системе соотношений (1) добавим соотношения

$$c_i = 1 \quad \text{для всех } i \in N_\alpha,$$
$$c_k = c_j, \quad c_j^2 = 1 \quad \text{для всех } k, j \in N_{\alpha'}. \tag{2}$$

Для каждого $N_\alpha \in S(P)$ определим двупорожденную группу G_α с определяющими соотношениями вида (1), (2). Эти группы и составляют класс W_2.

Пусть G_α — произвольная группа из W_2,

$$G_\alpha = \langle a, b\rangle,$$

$$A = \langle \dots, a_{-n}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\rangle,$$

где $a_i = b^{-i}ab^i$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Легко показать, что подгруппы $Z(G_\alpha)$, A, G_α', $Z(A)$, $C = G_\alpha' \cdot Z(A)$ являются формульными подгруппами группы G_α.

Поскольку A метабелева и A' — группа порядка два, получим, что $Z(A)$ порождается квадратами всех элементов группы A. Тогда $A/Z(A)$ — бесконечная элементарная абелева 2-группа и каждый элемент a из A, не принадлежащий $Z(A)$, записывается в виде

$$a = a_{n_1}a_{n_2}\dots a_{n_k}z, \ z \in Z(A),$$

где $n_i \neq n_j$ при $i \neq j$, $n_i < n_j$, как только $i < j$, $i, j = 1, 2, \dots, k$. Отметим, что при k четном a принадлежит подгруппе C и при k нечетном a не принадлежит подгруппе C. Действительно, для любых a_{n_1} и a_{n_2} имеем:

$$a_{n_1}a_{n_2} = a_{n_1}^2 a_{n_1}^{-1} b^{n_1-n_2} a_{n_1} b^{n_2-n_1} = a_{n_1}^2 [a_{n_1}, b^{n_2-n_1}].$$

Произвольный элемент, не принадлежащий подгруппе A, записывается в виде ab^n, $a \in A$, $n \neq 0$.

Рассмотрим коммутатор

$$g = [a_{n_1}\dots a_{n_k}z, (ab^n)^{-1} a_{n_1}\dots a_{n_k}z\,(ab^n)], \ z \in Z(A).$$

Можно доказать, что при k нечетном и большем единицы существует четное n, что $g=1$. При $k=1$, согласно (2), $g=1$ тогда и только тогда, когда $n \in N_\alpha$. Отсюда можно сделать вывод, что

$$M_{1\alpha} = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} a_i Z(A)$$

является формульным подмножеством группы G_α. Тогда множество

$$M_{2\alpha} = b^{\pm p_1}A \cup b^{\pm p_2}A \cup \ldots \cup b^{\pm p_n}A \cup \ldots,$$

где $\{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\} = N_\alpha \in S(P)$, также является формульным подмножеством.

Теорема 2. *Для любых α и β таких, что $N_\alpha \neq N_\beta$, группы G_α и G_β элементарно неэквивалентны.*

Доказательство. Поскольку $N_\alpha \neq N_\beta$, существует простое число p такое, что $p \in N_\alpha$ и $p \notin N_\beta$. Пусть подгруппа A выделяется формулой $\mathscr{R}(x)$, а множество $M_{2\alpha}$ выделяется формулой $\mathscr{Z}(y)$. Тогда замкнутая формула

$$\exists x_1 x_2 x_3 ((x_1 = x_2^p x_3) \,\&\, \mathscr{Z}(x_1) \,\&\, \mathscr{R}(x_3))$$

будет истинной на G_α и ложной на G_β. Эта формула означает, что в множестве $M_{2\alpha} \subset G_\alpha$ существует элемент, из которого извлекается p-й корень по $\operatorname{mod} A$, но в множестве $M_{2\beta}$ такого элемента нет.

Отсюда следует, что W_2 содержит континуум элементарно неэквивалентных групп.

Теорема 3. *Всякая группа из W_2 обладает формульным предикатом вложения.*

Из формульности множества $M_{2\alpha}$ следует формульность множества $M_{3\alpha} = b^{-1}A \cup bA$. Пусть G_α элементарно эквивалентна группе H и множества M_1' и M_3' выделяются в H теми же формулами, что $M_{1\alpha}$ и $M_{3\alpha}$ в G_α. Взяв по одному элементу из M_1' и M_3', породим подгруппу H_1, изоморфную группе G_α.

В заключение отметим два следствия, касающихся элементарно универсальных групп.

Определение 3 ([3]). Группа G называется **элементарно универсальной** для класса групп K, если она сама принадлежит этому классу и каждая группа из K элементарно эквивалентна некоторой подгруппе группы G.

Следствие 2. *Множество счетных групп таких, что центр каждой группы есть элементарная абелева 2-группа, а фактор-группа по центру двуступенно разрешима, не имеет элементарно универсальной группы.*

Следствие 3. *Множество счетных трехступенно разрешимых групп не имеет элементарно универсальной группы.*

Автор выражает благодарность Ю. М. Горчакову за постановку вопросов и помощь при написании работы.

Институт физики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Красноярск

Поступило
7 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Мальцев, Алгебраические системы, «Наука», 1970. [2] Ph. Hall, Proc. London Math, Soc., 4, 419 (1954). [3] М. И. Каргаполов, Алгебра и логика, 9, 4, 428 (1970).