

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Е. В. ВОРОНОВСКАЯ

ВОПРОСЫ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧЕК ЧЕБЫШЕВСКОГО АЛЬТЕРНАНСА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 19 VI 1972)

В наших статьях ^(1, 2) был предложен новый подход к проблемам лагранжевой интерполяции. Напомним постановку задачи и приведем из ⁽¹⁾ нужную нам теорему.

1. Пусть $f(x) \in C_{[0,1]}$ и $J_p(x)$ — ее алгебраический лагранжев полином. Представим процесс $f(x) - J_p(x)$ — (л)-процесс, при $p \rightarrow \infty$ в другой, эквивалентной форме:

$$f(x) - J_p(x) = [f(x) - Y_p^*(x)] - [J_p(x) - Y_p^*(x)], \quad (1)$$

$$f(x) - J_p(x) = F_p(x) - R_p(x) = F_p(x) - A_p Q_p(x), \quad (2)$$

где $Y_p^*(x)$ — полином наилучшего приближения к $f(x)$ в чебышевской метрике, $\max_{[0,1]} |Q_p(x)| = 1$ (приведенный полином).

В форме (2) интерполируется $F_p(x)$ с той же матрицей, что и в форме (1). Очевидно, необходимое и достаточное условие равномерной сходимости процесса есть $A_p \rightarrow \infty$; обозначим такой процесс (λ, w) . Все остальные (л)-процессы обозначим $(\lambda, \bar{w})$.

Теорема 1. Пусть $\{Q_p(x)\}_0^\infty$ — произвольно выбранная система приведенных полиномов. Составим для данной $f(x)$ семейство процессов с параметром $(A_p)_0^\infty$:

$$F_p(x) - A_p Q_p(x). \quad (3)$$

А) Необходимое и достаточное условие, чтобы процесс (3) оказался (л)-процессом: для каждого p существуют $p+1$ чисел $\rho_i^{(p)} \in [0, 1]$ такие, что $F_p(\rho_i^{(p)}) + A_p Q_p(\rho_i^{(p)}) = 0$; $i = 1, 2, \dots, p+1$; тогда, так как не все $(\rho_i^{(p)})$ в строке суть нули $F_p(x)$, имеем

$$A_p = F_p(\rho_i^{(p)}) / Q_p(\rho_i^{(p)}).$$

Б) Пусть процесс (3) есть (л)-процесс; необходимое и достаточное условие того, чтобы он был и (λ, w) , следующее: если $[Q_p^{(p)}]$ — интерполяционная матрица, то для одной (любой) инфинитарной точки $\rho^{(p)}$ из матрицы, не содержащейся инфинитарно ⁽¹⁾ в таблице нулей $F_p(x)$ имеет место

$$|F_p(\rho^{(p)})| \ll |Q_p(\rho^{(p)})|. \quad (4)$$

В) Если процесс (3) есть (л)-процесс, то необходимое и достаточное условие того, чтобы он был и $(\lambda, \bar{w})$ следующее: в одной, хотя бы выборочно инфинитарной точке ⁽¹⁾ $\rho^{(p)}$ из матрицы имеет место при $m > 0$ и $\text{const}(p)$

$$|Q_p(\rho^{(p)})| \leq m |F_p(\rho^{(p)})|. \quad (5)$$

Напомним введенное в ⁽¹⁾ понятие о главных ветвях и главных нулях $F_p(x)$, заключенной в полосе $\pm L_p$, где $L_p = \max_{[0,1]} |f(x) - Y_p^*(x)|$. Часть

графика $F_p(x)$ на $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$ названа главной ветвью при условиях: 1) $F_p(\alpha) = \pm L_p$, $F_p(\beta) = \mp L_p$ (разные знаки); 2) $|F_p(x)| < L_p$ при $\alpha < x < \beta$. Корень $F_p(x)$ на главной ветви назван главным нулем.

В дальнейшем систему $\{Q_p(x)\}$ выберем так, что при каждом p все корни $Q_p(x)$ суть главные нули $F_p(x)$ по одному на главных ветвях. Тогда при любом A_p процесс $F_p(x) - A_p Q_p(x)$ (нулевой процесс) дает p точек интерполяции. Для полноты матрицы и для определения A_p не хватает одной инфинитарной точки $\rho^{(p)}$, которая и определит характер процесса.

2. Для дальнейшего отметим следующие вспомогательные оценки.

Если $x \in [0, 1]$ и $\lambda_i \in [\alpha, \beta] \subset [0, 1]$, имеем

$$\max \left| \prod_1^p (x - \lambda_i) \right| \geq \begin{cases} (1 - \beta)^p & \text{при } 1/2(\alpha + \beta) \leq 1/2, \\ \alpha^p & \text{при } 1/2(\alpha + \beta) \geq 1/2. \end{cases}$$

Таким образом, при $\beta - \alpha = l$ равномерная (наименьшая) миноранта: $(1/2(1 - l))^p$ (в центре $[0, 1]$) и повышается к краям до $(1 - l)^p$.

Теорема 2. Если для $f(x)$ имеется сегмент $[l_p] \subset [0, 1]$ длиной $l_p \leq 1/(1 + 2L_p^{-1/p})$, на котором хотя бы выборочно при $\tilde{p} \rightarrow \infty$ найдутся p главных нулей $F_p(x)$, то для $f(x)$ гарантировано наличие процесса $(\lambda, \bar{w})$.

Доказательство. Строим процесс $F_p(x) - A_p Q_p(x)$, где все корни $Q_p(x)$ суть главные нули $F_p(x)$: $\sigma_i^{(p)} \in [l_p]$. Дополним интерполяционную матрицу точкой $\rho^{(p)} = \theta^{(p)} \in [l_p]$, где $|F_p(\theta^{(p)})| = L_p$. Тогда $A_p = = L_p / |Q_p(\theta^{(p)})|$. Для получения процесса $(\lambda, \bar{w})$ достаточно выполнения условия $|Q_p(\theta^{(p)})| \leq mL_p$ (хотя бы выборочно по p).

Имеем оценки

$$|Q_p(\theta^{(p)})| \leq \max_{x \in [l_p]} \left| \prod_{\sigma_i \in [l_p]} (x - \sigma_i^{(p)}) \right| / \max_{x \in [0, 1]} \left| \prod_{\sigma_i \in [l_p]} (x - \sigma_i^{(p)}) \right| = I / II.$$

Беря грубую мажоранту для I и равномерную миноранту для II , получим $I < L_p^p$; $II \geq (1/2(1 - l_p))^p$.

Итак, требуется $(2L_p / (1 - l_p))^p \leq mL_p$. Отсюда $l_p \leq 1 / (1 + 2 / L_p^{2/p})$ при $\tilde{p} \rightarrow \infty$ (по выборке).

Теорема 2^A. Если для $f(x)$ имеет место $\lim L_p^{1/p} \geq 1/2$ и на $[0, 1/2]$ при $\tilde{p} \rightarrow \infty$ найдутся не менее чем $\tilde{p}$ главных нулей $F_p(x)$, то существует процесс $(\lambda, \bar{w})$ и именно в нулевой форме.

Пусть $[l_p] = [0, l]$ (или $[1 - l, 1]$), где $l \leq 1/2$ и на $[0, l]$ имеется не менее чем p главных нулей $F_p(x)$; здесь можно получить более сильные оценки, а именно: $II > (1 - l)^p$; если выберем $\theta^{(p)} = 1/2l$, получим $I \leq (1/2l)^p$; тогда требуемое условие для процесса $(\lambda, \bar{w})$ есть $(1/2l(1 - l))^p \leq mL_p$. Если положить $l = 1/2$, то требуется $(1/2)^p \leq mL_p$, или при $\tilde{p} \rightarrow \infty$, $L_p^{1/p} \geq 1/2$.

Замечание 1. Сегмент (l_p) не является закрепленным (по p) ни по длине, ни по положению на $[0, 1]$. Однако, если $\lim L_p^{1/p} > 0$, то можно считать $[l_p] = [l]_p$, т. е. постоянной длины. К целой $f(x)$ теорема 2 неприменима.

Замечание 2. Вид условий теоремы 2 напрашивается на использование результатов С. Н. Бернштейна (²). Для случая сегмента эти результаты таковы. Если $f(x)$ аналитическая внутри эллипса с фокусами в точках 0 и 1 и имеет особенности на контуре, то $\lim L_p^{1/p} = 1/R$, где R есть сумма осей эллипса.

Следствие. Пусть для $f(x)$ все (λ) -процессы суть и $(\lambda, \bar{w})$. Выберем $l \leq 1 / (1 + 2L_p^{-1/p})$, предполагая $\lim L_p^{-1/p} > 0$. Тогда на $[l]_p$ число

главных нулей $F_p(x)$ меньше p ; следовательно, общее их число $N_p < (1 + 2L_p^{-1/p})p$. Если $\lim L_p^{1/p} = 1/R$, то по выборке $N_p < (1 + 2R)p$.

3. В статье ⁽²⁾ была предложена классификация непрерывных на $[0, 1]$ функций, которой мы здесь будем придерживаться. Переходя к изучению хода строк $(L_p)_0^\infty$ и $(L_p^{1/p})_1^\infty$, сделаем некоторые замечания.

1) Теорема С. Н. Бернштейна ⁽⁴⁾ утверждает: какова бы ни была строка $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_p \geq \dots$ при $\alpha_p \rightarrow 0$, найдется $f(x) \in C_{[0, 1]}$, для которой строка ее наилучших приближений $(L_p)_0^\infty$ совпадает с $(\alpha_p)_0^\infty$.

2) Тогда и только тогда $f(x) \in K_\infty$ (т. е. целая), если $\lim L_p^{1/p} = 0$.

3) Для любой не аналитической $f(x)$ имеем $\lim L_p^{1/p} = s$.

4) Если $\lim L_p^{1/p} < \lim L_p^{1/p}$, то необходимо наличие в строке (L_p) инфинитарных повторений.

Покажем, что в любых классах имеются функции, у которых $\lim L_p^{1/p}$, т. е. которые по выборке при $p \rightarrow \infty$ ведут себя как целые функции.

Пример 1. Разбиваем натуральные числа на группы, p -я группа заканчивается числом $p!$. Строка (L) строится с повторением в каждой группе и определяет некоторую $f(x)$.

Пусть $0 < a < 1$; $1|2|3,4,5,6| \dots |p!+1, \dots, (p+1)!| \dots$,

$$(L) \quad a|a^2|a^3| \dots a^{p!}| \dots |a^{(p+1)!}, \dots, a^{(p+1)!}| \dots$$

Соответственная строка радикалов в $(p+1)$ -й группе такова:

$$a^{(p+1)!} / (p!+1) < a^{(p+1)!} / (p!+2) < \dots < a^{(p+1)!} / (p+1)!$$

Выборка из последних членов в каждой группе дает $\lim L_p^{1/p} = a$, выборка из первых членов: $\lim L_p^{1/p} = 0$. Итак, $f(x)$ аналитическая и, если $1/a = R$, то $f(x) \in K_R$.

Пример 2. При разбивке номеров последнее число в k -й группе есть $p_k = 2^{p_k^2}$ или $p_{k-1} = (\log_2 p_k)^{1/2}$, $k = 1, 2, 3, \dots$. Соответственно (L_p) имеют инфинитарные повторения по группам, а именно:

$$(L_p) \quad 1,2|3,4, \dots, 16|17, \dots, 2^{256}| \dots |p_{k-1}+1, \dots, p_k| \dots, \\ |1/2|^4 \dots (1/2)^4 | (1/2)^{256} \dots (1/2)^{256} | \dots | (1/2)^{p_{k-1}^2} \dots (1/2)^{p_{k-1}^2} | \dots$$

Выборка из первых членов в группах дает $L_p^{1/p} = (1/2)^{p_{k-1}^2/(p_{k-1}+1)} \rightarrow 0$.

Выборка из последних членов: $L_p^{1/p} = (1/2)^{p_{k-1}^2/p_k} = (1/2)^{(\log p_k)/p_k} \rightarrow 1$. Так как здесь $L_p = O(1/p)$, то $f(x)$ принадлежит классу не выше $K^{(1)}$. Можно аналогичным приемом строить (L_p) с заранее заданными $\lim L_p^{1/p}$ и $\lim L_p^{1/p}$.

Теорема 3. Пусть для $f(x)$ имеем $Y_p^*(x)$ точно степени p . Необходимое и достаточное условие того, чтобы разность $f(x) - Y_p^*(x)$ имела ровно $N+2$ точек альтернанса $\pm L_p$, где $p \leq N < \infty$, состоит в следующем: в строке $(L_p)_0^\infty$ для $f(x)$ имеет место

$$\dots L_{p-1} > L_p = L_{p+1} = \dots = L_N > L_{N+1}, \dots, \quad (6)$$

т. е. имеется участок с повторениями точно ст p до N .

1) Пусть выполнено (6); положим $Y_p^*(x), \dots, Y_N^*(x)$ — соответственные полиномы наилучшего приближения. Ввиду оценки $\max |f(x) - Y_p^*(x)| = L_N$, $Y_p^*(x)$ есть наилучший (единственный) во всем множестве $\{P_N(x)\}$. Следовательно, число альтернансов есть $N+2$, и не выше.

2) Если $f(x) - Y_p^*(x)$ имеет ровно $N+2$ альтернирующих отклонений, то достаточно, чтобы в $\{P_N(x)\}$ полином наилучшего приближения был $Y_p^*(x)$, а тогда $L_p = L_{p+1} = \dots = L_N$ и не далее.

З а м е ч а н и е. В каждом классе существуют функции, для которых любой данный полином $P_p(x)$ есть полином наилучшего приближения на $[0, 1]$, и притом с любым произвольно заданным числом $N_p + 2 \geq p + 2$ точек альтернанса. Для этого достаточно, взяв любую $f(x) \in C_{[0,1]}$, составить $f(x) - Y_N^*(x) = [f(x) + P_p(x) - Y_N^*(x)] - P_p(x) = \Phi(x) - P_p(x)$, и $P_p(x)$ дает наилучшее приближение к $\Phi(x)$ с не менее чем $N + 2$ точками отклонений.

4. Вопрос о распределении точек альтернанса на основном сегменте затронут в теореме М. И. Кадеца ⁽⁵⁾. В приложении к случаю $f(x) \in C_{[0,1]}$ из этой теоремы следует утверждение: если для $p = 0, 1, 2, \dots$ составить таблицу всех точек отклонения $\pm L_p$ для $f(x) - Y_p^*(x)$ и выделить из нее произвольную треугольную матрицу по $p + 2$ точек в каждой строке, дающих альтернанс, то всегда найдется выборка строк $p_k \rightarrow \infty$, в которых точки измельчают сегмент $[0, 1]$.

Возможность наличия неизмельчающих выборок легко обнаружить: пусть $f(x)$ такова, что строка (L_p) в своей выборке $(L_{p_k})_{k=1}^\infty$ дает для $f(x) - Y_{p_k}^*(x) \cdot N_{p_k} = 2p_k + 4$ точек альтернанса; тогда на одном из полусегментов $[0, 1/2]$; $[1/2, 1]$ при $k \rightarrow \infty$ имеются не менее чем $p_k + 2$ таких точек.

Остается открытым вопрос: имеется ли все же для любой $f(x)$ такая выборочная матрица альтернирующих точек, которая при любом $p \rightarrow \infty$ измельчает $[0, 1]$?

Ленинградский электротехнический институт связи
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило
12 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Е. В. Вороновская, ДАН, 202, № 1 (1972). ² Е. В. Вороновская, ДАН, 202, № 2 (1972). ³ С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937. ⁴ С. Н. Бернштейн, Собр. соч., 2, Изд. АН СССР, 1954. ⁵ М. И. Кадец, УМН, 15, в. 1 (91) (1960).