

УДК 535.14

ФИЗИКА

Т. Н. ЗУБАРЕВ, В. А. ДЕМЕНТЬЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО РЕЖИМА ГЕНЕРАЦИИ В МНОГОМОДОВОМ ОКГ НА ТВЕРДОМ ТЕЛЕ

(Представлено академиком А. П. Александровым 17 IV 1972)

В настоящей работе рассмотрена задача устойчивости монохроматического режима генерации ОКГ на твердом теле в одномерном многомодовом резонаторе.

В качестве исходной системы уравнений, описывающих работу ОКГ, примем следующую ^(1, 2):

$$\dot{v} = \gamma_1(1 - v) + 2i\Omega e(\rho^* - \rho), \quad (1)$$

$$\dot{\rho} = -(i\omega_0 + \gamma_2)\rho - i\Omega ev, \quad (2)$$

$$\ddot{e} + 2\gamma_3\dot{e} - c^2\nabla^2 e + 2\frac{\Omega}{\omega_0}(\ddot{\rho} + \ddot{\rho}^*) = 0, \quad (3)$$

где $e = (2\pi n_0 \hbar \omega_0)^{-1/2} E$, E — напряженность электрического поля; $\rho = \rho_{12}$, $v = \rho_{22} - \rho_{11}$, ρ_{ij} , $i, j = 1, 2$ — матрица плотности двухуровневых квантовых объектов в энергетическом представлении; n_0 — эффективная плотность инвертированных квантовых объектов, зависящая от накачки; ω_0 — частота линии перехода между уровнями квантового объекта; $\Omega = (2\pi n_0 \omega_0 / \hbar)^{1/2} D$, D — абсолютная величина дипольного момента перехода. Константы γ_1 , γ_2 и γ_3 описывают соответственно релаксацию диагональных и недиагональных элементов матрицы плотности и затухание поля в пассивном резонаторе.

Из системы (1)–(3) можно получить замкнутое уравнение для поля. Это можно сделать в общем виде, но слабая нелинейность уравнений и наличие дисперсии позволяют сделать в уравнении (3) замену $\ddot{\rho} + \ddot{\rho}^* \simeq -\omega_0^2(\rho + \rho^*)$, не сказывающуюся на результатах последующих вычислений. Тогда для e получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение в частных производных с запаздывающим ядром:

$$\frac{AB}{4\omega_0^2} e = -\Omega^2 \left\{ 1 + \int \hat{e} \exp[-\gamma_1(t - \tau)] d\tau \right\} e, \quad (4)$$

$$A = -c^2\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma_3 \frac{\partial}{\partial t}, \quad B = \omega_0^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\gamma_2 \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{e} = \frac{A}{\omega_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \gamma_2 \right) e.$$

Если ограничиться исследованием устойчивости монохроматической генерации ОКГ, то для монохроматических колебаний поля $e = e_n \exp(-i\omega_n t) + \text{к.с.}^*$ (для упрощения дальнейших выкладок предположено, что $\omega_n = \omega_0$) и возмущения, которое в общем виде представляется выражением $\delta e = e_m \exp(-i\omega_m t) + e_l \exp(-i\omega_l t) + \text{к.с.}$, $\omega_m + \omega_l^* = 2\omega_n$, из уравнения (4) получаем

$$\frac{A_n B_n}{4\omega_0^2} \mathcal{E}_n + \Omega^2 \frac{\mathcal{E}_n}{1 + |\mathcal{E}_n|^2} = 0, \quad (5)$$

* Комплексно-сопряженное.

$$\frac{A_m B_m}{4\omega_0^2} \mathcal{E}_m + \frac{\Omega_2}{1 + |\mathcal{E}_n|^2} \left\{ \mathcal{E}_m - \frac{\gamma_1 (\gamma + 2\gamma_2)}{2} \frac{\mathcal{E}_n (\mathcal{E}_m \mathcal{E}_{-n} + \mathcal{E}_n \mathcal{E}_{-l})}{[(\gamma + \gamma_1)(\gamma + \gamma_2) + \gamma_1 \gamma_2 |\mathcal{E}_n|^2]} \right\} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{A_l B_l}{4\omega_0^2} \mathcal{E}_l + \frac{\Omega_2}{1 + |\mathcal{E}_n|^2} \left\{ \mathcal{E}_l - \frac{\gamma_1 (\gamma + 2\gamma_2)}{2} \frac{\mathcal{E}_n (\mathcal{E}_m \mathcal{E}_{-n} + \mathcal{E}_n \mathcal{E}_{-l})}{[(\gamma + \gamma_1)(\gamma + \gamma_2) + \gamma_1 \gamma_2 |\mathcal{E}_n|^2]} \right\} = 0, \quad (7)$$

где $\mathcal{E}_p = 2\Omega (\gamma_1 \gamma_2)^{-1/2} e_p$, $A_p = -c^2 \gamma^2 - \omega_p^2 - 2i\omega_p \gamma_3$, $\gamma = -i(\omega_m - \omega_n)$,
 $B_p = \omega_0^2 - \omega_p^2 - 2i\omega_p \gamma_2$, $\mathcal{E}_{-p} = \mathcal{E}_p^*$, $\omega_{-p} = -\omega_p^*$, $p = n, m, l$.

Дальнейшее рассмотрение будем проводить для одномерного резонатора длины L , полностью заполненного активной средой, с собственными колебаниями

$$\Phi_q = \left(\frac{2}{L} \right)^{1/2} \sin \frac{\tilde{\omega}_q}{c} r, \quad \tilde{\omega}_q L = N_q \pi c, \quad (8)$$

N_q — целое число. Полагаем, что одна из собственных частот резонатора $\tilde{\omega}_0$ совпадает с частотой линии ω_0 . Собственные частоты, симметричные относительно ω_0 , будем обозначать $\tilde{\omega}_q$ и $\tilde{\omega}_{-q}$. $\tilde{\omega}_q > \omega_0 > \tilde{\omega}_{-q}$. Вначале рассмотрим устойчивость одномодового монохроматического решения

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{n0} \Phi_0, \quad \mathcal{E}_{n0} = \text{const}, \quad (9)$$

затем устойчивость монохроматического пакета

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_n^{(1)} \exp \left(i \frac{\omega_0}{c} r \right) + \mathcal{E}_n^{(2)} \exp \left(-i \frac{\omega_0}{c} r \right), \quad (10)$$

где $\mathcal{E}_n^{(1)}$, $\mathcal{E}_n^{(2)}$ — медленно меняющиеся функции координаты r . Предположим также, что

$$\gamma_2 \gg \gamma_3 \gg \gamma_1, \quad |\tilde{\omega}_q - \omega_0| \gg \gamma_1. \quad (11)$$

Условие (11) (а также используемое ниже условие (14)), как правило, выполняется в интересующем нас случае твердотельных ОКГ с плоскими зеркалами.

Вид одномодового монохроматического решения (9) известен (3):

$$4L^{-1} |\mathcal{E}_{n0}|^2 = 4\Omega_{\text{пр}}^2 - 1 - [1 + 8\Omega_{\text{пр}}^2]^{1/2}, \quad (12)$$

где $\Omega_{\text{пр}}^2 = \Omega^2 (\gamma_2 \gamma_3)^{-1}$ — параметр генерации, $\Omega_{\text{пр}}^2 > 1$ выше порога генерации. Чтобы изучить устойчивость решения (9), (12), умножим уравнения (6), (7) на Φ_q и проинтегрируем по пространству, пренебрегая модами, для которых $|\tilde{\omega}_q - \omega_0| \gtrsim \omega_0$. Тогда отщепляются уравнения для компонент возмущения $\mathcal{E}_{s,0}$ и компонент $\mathcal{E}_{s,\pm q}$, $q \neq 0$, где $\mathcal{E}_{s,\pm q} = \int \mathcal{E}_s \Phi_{\pm q} dr$, $s = m, l$.

Возмущения $\mathcal{E}_{m,0}$, $\mathcal{E}_{l,0}$ затухают со временем:

$$\gamma = -3/8 \gamma_1 (x+1)(x+2)^2(x+3)^{-1} \pm i[\gamma_1 \gamma_3 x(x+3)]^{1/2}, \quad (13)$$

где

$$x = [2L^{-1} |\mathcal{E}_{n0}|^2 + 1]^{1/2} - 1, \quad \Omega_{\text{пр}}^2 - 1 \gg \gamma_1 \gamma_3^{-1}. \quad (14)$$

Исследуем возмущения с компонентами $\mathcal{E}_{s,\pm q}$, $q \neq 0$, $s = m, l$, появляющиеся в многомодовом резонаторе. Уравнения допускают расщепление

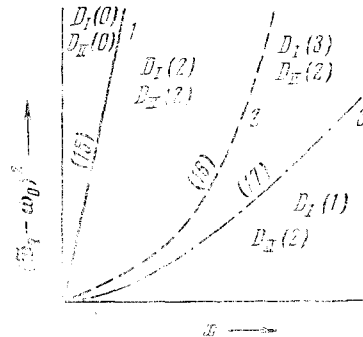


Рис. 1. D -разбиение плоскости параметров для возмущений $\mathcal{E}_{s,\pm q}$, $q \neq 0$, $s = m, l$. $D_i(k)$ отмечает область, в которой секулярное уравнение решений i имеет k корней, лежащих в правой комплексной полуплоскости

для комбинаций компонент $\mathcal{E}_{m, \pm q} + \mathcal{E}_{-l, \mp q}$ (решения I) и $\mathcal{E}_{m, \pm q} - \mathcal{E}_{-l, \mp q}$ (решения II). D — разбиение плоскости параметров $((\bar{\omega}_q - \omega_0)^2, x)$ для решений I и II типа приводится на рис. 1. Уравнения кривых 1–3 и значения γ на них даются формулами (15)–(17) соответственно:

$$(\bar{\omega}_q - \omega_0)^2 = \frac{1}{2}\gamma_3^2 x, \quad \gamma = \pm i(\bar{\omega}_q - \omega_0), \quad (15)$$

$$(\bar{\omega}_q - \omega_0)^2 = \gamma_3^2 x^2 (2x + 3)(x + 1)^{-2}, \quad \gamma = 0, \quad (16)$$

$$(\bar{\omega}_q - \omega_0)^2 = \frac{3}{4}\gamma_1\gamma_3 x(x+1)(x+2)^2(x+3)^{-1}, \quad \gamma = \pm i[\gamma_1\gamma_3 x(x+3)]^{1/2}. \quad (17)$$

В области рис. 1, ограниченной сверху кривой 2, одномодовое монохроматическое решение (9) неустойчиво к образованию монохроматического пакета (10) ⁽⁴⁾. Покажем, что монохроматический пакет мод неустойчив. Предположим, что неустойчивость пакета определяется таким корнем секулярного уравнения и возмущение устроено на таких модах, что

$$\gamma_1 \ll |\gamma| \ll \gamma_2, \quad |\bar{\omega}_q - \omega_0| \ll \gamma_2. \quad (18)$$

Тогда в уравнениях (6), (7) можно пренебречь последним членом, и они становятся независимыми. В этом случае для компонент возмущения $\mathcal{E}_{m, q}$ имеем

$$\left[\frac{\gamma}{\gamma_3(\Omega_{\text{пр}}^2 - 1)} + i \frac{\bar{\omega}_q - \omega_0}{\gamma_3(\Omega_{\text{пр}}^2 - 1)} - 1 \right] \mathcal{E}_{m, q} + \frac{1}{1 - \Omega_{\text{пр}}^2} \int_0^L \frac{\mathcal{E}_m |\mathcal{E}_n|^2 \Phi_q dr}{1 + |\mathcal{E}_n|^2} = 0. \quad (19)$$

Поскольку ширина модового спектра $\mathcal{E}_n$ дается формулой (16), то, как следует из уравнений (19), можно выбрать возмущение, устроенное на таких модах, что $|\bar{\omega}_q - \omega_0|$ для них не превосходит по порядку величины $\gamma_3(\Omega_{\text{пр}}^2 - 1)$, γ для таких возмущений будет иметь порядок $\gamma_3(\Omega_{\text{пр}}^2 - 1)$ и исходные предположения (18) выполняются, если верны неравенства (11), (14).

Диагональные члены матрицы, составленной из коэффициентов при $\mathcal{E}_{m, q}$ в уравнениях (19), имеют вид

$$\gamma + i(\bar{\omega}_q - \omega_0) - \gamma_3(\Omega_{\text{пр}}^2 - 1) + \gamma_3\Omega_{\text{пр}}^2 \int_0^L \frac{\Phi_q^2 |\mathcal{E}_n|^2 dr}{1 + |\mathcal{E}_n|^2}.$$

Соответственно можем записать секулярное уравнение

$$\gamma^N + \gamma^{N-1}\gamma_3(\Omega_{\text{пр}}^2 - 1) \left[-N + \frac{1}{1 - \Omega_{\text{пр}}^2} \sum_q \int_0^L \frac{\Phi_q^2 |\mathcal{E}_n|^2 dr}{1 + |\mathcal{E}_n|^2} \right] + \dots = 0, \quad (20)$$

где N — число мод, на которых устроено возмущение. Так как уравнение (20) имеет вещественные коэффициенты, то для доказательства неустойчивости монохроматического пакета (10) достаточно показать, что коэффициент при γ^{N-1} в этом уравнении отрицателен, т. е.

$$\frac{\Omega_{\text{пр}}^2}{N} \sum_q \int_0^L \frac{\Phi_q^2 dr}{1 + |\mathcal{E}_n|^2} > 1. \quad (21)$$

Подставляя выражения (8) и (10) в (21) и интегрируя, можно показать, что это неравенство выполняется, если верно нестрогое неравенство

$$\frac{\Omega_{\text{пр}}^2}{L} \int_0^L \frac{1}{2|\mathcal{E}_n^{(1)}||\mathcal{E}_n^{(2)}|} \left\{ 1 + \frac{2|\mathcal{E}_n^{(1)}||\mathcal{E}_n^{(2)}| - (1 + |\mathcal{E}_n^{(1)}|^2 + |\mathcal{E}_n^{(2)}|^2)}{[(1 + |\mathcal{E}_n^{(1)}|^2 + |\mathcal{E}_n^{(2)}|^2) - 4|\mathcal{E}_n^{(1)}|^2|\mathcal{E}_n^{(2)}|^2]^{1/2}} \right\} dr \geq 1. \quad (22)$$

Если из уравнения (5) получить уравнения для $|\mathcal{E}_n^{(1)}|$, $|\mathcal{E}_n^{(2)}|$, как это сделано в работе ⁽⁴⁾, то из них интегрированием по пространству с учетом

граничных условий находим

$$\frac{\Omega_{np}^2}{L} \int_0^L \frac{1}{4 |\mathcal{E}_n^{(1)}|^2 |\mathcal{E}_n^{(2)}|^2} \left\{ |\mathcal{E}_n^{(1)}|^2 + |\mathcal{E}_n^{(2)}|^2 + \frac{4 |\mathcal{E}_n^{(1)}|^2 |\mathcal{E}_n^{(2)}|^2 - (|\mathcal{E}_n^{(1)}|^2 + |\mathcal{E}_n^{(2)}|^2) (1 + |\mathcal{E}_n^{(1)}|^2 + |\mathcal{E}_n^{(2)}|^2)}{[(1 + |\mathcal{E}_n^{(1)}|^2 + |\mathcal{E}_n^{(2)}|^2)^2 - 4 |\mathcal{E}_n^{(1)}|^2 |\mathcal{E}_n^{(2)}|^2]^{1/2}} \right\} dr = 1. \quad (23)$$

Из равенства (23) следует неравенство (22).

Таким образом, доказано, что при указанных предположениях монохроматическая генерация ОКГ на твердом теле в одномерном многомодовом резонаторе неустойчива, даже если она охватывает пакет мод. Поэтому интенсивность такого ОКГ должна быть промодулирована по амплитуде. Заключение о типе модуляции, сделанные на основании линейного приближения, по необходимости будут носить вероятностный характер. Можно ожидать, что области между кривыми 1 и 3 на рис. 1 будут соответствовать пиковый режим, если выполняется условие

$$(\tilde{\omega}_q - \omega_0)^4 \leq 4\gamma_1 \gamma_3^3 x^3 (x + 3). \quad (24)$$

Такой вывод основывается на том, что при выполнении (24) в области между кривыми 1 и 3 секулярное уравнение решений I имеет пару комплексных корней

$$\gamma = (2\gamma_3 x)^{-1} \{ (\tilde{\omega}_q - \omega_0)^2 \pm i [4\gamma_1 \gamma_3^3 x^3 (x + 3) - (\tilde{\omega}_q - \omega_0)^4]^{1/2} \}, \quad (25)$$

мнимые части которых стремятся при уменьшении $|\tilde{\omega}_q - \omega_0|$ или увеличении накачки к мнимой части выражения (13), описывающего затухание флуктуаций в одномодовом резонаторе. Но именно приближенное совпадение частоты пиков с частотой затухающих релаксационных колебаний интенсивности излучения в одномодовом резонаторе, как известно из эксперимента⁽⁵⁾, и является характерной чертой пикового режима в многомодовом резонаторе. Поэтому для области пиковой генерации в $(2q + 1)$ -модовом одномерном резонаторе имеем оценку

$$3 [4q^2 (x + 3)]^{-1} \gamma_1 \gamma_3 x (x + 1) (x + 2)^2 \leq \Delta^2 \leq 2 [\gamma_1 \gamma_3^3 x^3 (x + 3)]^{1/2}, \quad (26)$$

где Δ — расстояние между частотами соседних мод.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова
Москва

Поступило
14 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. М. Файн, ЖЭТФ, 33, 4, 945 (1957). ² А. Н. Ораевский, Радиотехника и электроника, 4, 4, 718 (1959). ³ Т. И. Кузнецова, С. Г. Раутиан, ЖЭТФ, 43, 5, 1897 (1962). ⁴ Л. А. Островский, Е. И. Якубович, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, 8, 1, 91 (1965). ⁵ Э. М. Беленов, В. Н. Морозов, А. Н. Ораевский, Тр. физ. инст. им. П. Н. Лебедева, Квантовая радиофизика, 52, 237 (1970).