

УДК 517.946.9

МАТЕМАТИКА

А. И. АЧИЛЬДИЕВ

О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НА ГРАНИЦЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 15 V 1972)

Вырождающимся эллиптическим уравнениям посвящено много работ, обзор основных результатов которых имеется в монографии ⁽¹⁾. В подавляющем большинстве их коэффициент при искомой функции имеет знак, противоположный знаку квадратичной формы характеристической части уравнения. В исследованиях Л. Г. Михайлова ⁽²⁾ рассматриваются краевые задачи без ограничений на упомянутый знак. В работах С. Г. Михлина ⁽³⁾ и М. И. Вишика ⁽⁴⁾ изучены свойства операторов, соответствующих краевым задачам для вырождающихся эллиптических уравнений. Статья ⁽⁵⁾ посвящена изучению первой краевой задачи и задачи на собственные функции для эллиптического уравнения, вырождающегося на границе, причем порядок вырождения ограничен условием суммируемости некоторой отрицательной степени дискриминанта соответствующей квадратичной формы. В работе ⁽⁶⁾ указан способ нахождения всех собственных значений краевых задач типа Дирихле для вырождающихся на границе плоской области эллиптических уравнений и доказыва-ется полнота найденной системы регулярных собственных функций. В статье эти результаты обобщены на n -мерную область и рассмотрены соответствующие неоднородные краевые задачи без ограничения на знак коэффициента уравнения при искомой функции вне многообразия вырождения.

Пусть в евклидовом пространстве E_n дана ограниченная открытая область G , непрерывная граница Γ которой состоит из двух частей: поверхности γ класса $C_{2, \alpha}$, см. ⁽⁷⁾, и поверхности вырождения γ_0 . Обозначим через $\rho = \rho(x, \gamma_0)$ расстояние от точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ до γ_0 . Пусть G_ε — область, содержащаяся в G , ограниченная поверхностью $\Gamma_\varepsilon = \gamma \cap (\rho \geq \varepsilon) \cup \gamma_\varepsilon$ класса $C_{2, \alpha}$, где точки x поверхности γ_ε удовлетворяют неравенствам $\varepsilon \leq 2\rho(x, \gamma_0) \leq 2\varepsilon$ и ε достаточно малое положительное число, причем $G_{\varepsilon''} \subset G_{\varepsilon'}$ при $\varepsilon'' < \varepsilon'$. Пусть Q_ε — открытая область, содержащаяся в $G \setminus G_\varepsilon$, ограниченная поверхностью κ_ε и поверхностью $\kappa_\varepsilon \setminus \bar{\gamma}_0$ принадлежит классу $C_{2, \alpha}$.

Рассмотрим в области G эллиптическое дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv - (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} + c(x)u(x) = \lambda \sigma(x)u(x) + f(x). \quad (1)$$

Здесь и всюду в дальнейшем по паре одинаковых индексов ведется суммирование от 1 до n . Предположим, что $a_{ij} = a_{ji}$ и квадратичная форма $a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$ положительно определена в любой замкнутой области G_ε . Коэффициенты $a_{ij}(x) \in C_{1, \alpha}(\bar{G} \setminus \bar{\gamma}_0)$, а функции $c(x) > 0$, $\sigma(x) > 0$ и $f(x)$ принадлежат классу $C_{0, \alpha}(\bar{G} \setminus \bar{\gamma}_0)$. Функция $\sigma(x)$ суммируема в области G и равномерно относительно $\bar{\gamma}_0$ выполняется соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma(x)}{c(x)} = 0. \quad (2)$$

Заметим, что функция $c(x)$ может быть даже несуммируемой в области G .

Из равенства (2) для любого вещественного λ следует существование положительного числа $\delta(\lambda)$, что в $Q_{\delta(\lambda)}$ выполняется неравенство

$$c(x) - \lambda \sigma(x) \geq 0. \quad (3)$$

Условие D. Для любой точки $x_0 \in \bar{\gamma}_0$ существует функция $v(x)$, называемая «барьером», обладающая свойствами:

- а) $v(x)$ непрерывна в некоторой окрестности $\tau(x_0) \subset \bar{G}$ точки x_0 ;
- б) $v(x) > 0$ в $\tau(x_0)$, кроме точки x_0 , и $v(x_0) = 0$;
- в) $Lv > q_0 c(x)$ всюду в $\tau(x_0)$, где q_0 — некоторое положительное число.

Случаи существования «барьера» для вырождающихся уравнений указаны в (1, 8, 9).

Условие E. Для любого вещественного λ найдется такое число $\delta(\lambda)$, что в любой области Q_ε , $\varepsilon \leq \delta(\lambda)$, однородная краевая задача в классе функций, ограниченных в Q_ε , непрерывных в $Q_\varepsilon \setminus \bar{\gamma}_0$, принадлежащих $C_2(Q_\varepsilon)$, удовлетворяющих в Q_ε уравнению

$$Lu = \lambda \sigma(x) u(x) \quad (4)$$

и подчиняющихся краевому условию

$$u(x)|_{x \in \bar{\gamma}_0} = 0, \quad (5)$$

имеет только нулевое решение.

Условие E будет выполнено, если для любого вещественного λ существует положительная в $Q_{\delta(\lambda)}$ функция $w_\lambda(x)$, равномерно относительно $\bar{\gamma}_0$ стремящаяся к бесконечности при $x \rightarrow \gamma_0$, принадлежащая $C_2(Q_{\delta(\lambda)})$ и удовлетворяющая в $Q_{\delta(\lambda)}$ неравенству $Lw_\lambda - \lambda \sigma w_\lambda > q(\lambda) c(x)$, где $q(\lambda)$ — положительное число. Случаи существования функции $w_\lambda(x)$ указаны в (1, 8, 9).

В зависимости от того, какое из условий выполнено, рассмотрим следующую задачу на собственные значения.

Задача $D_0 [E_0]$. Найти те значения параметра λ (собственные значения), для которых существуют отличные от тождественного нуля собственные функции $u(x) \in C_2(G)$, удовлетворяющие в области G уравнению (4), непрерывные в замкнутой области $\bar{G}$ [ограниченные в G , непрерывные в $\bar{G} \setminus \bar{\gamma}_0$] и подчиняющиеся краевому условию

$$u(x)|_\Gamma = 0 \quad [u(x)|_\gamma = 0]. \quad (6)$$

Обозначим через $L_2(\Omega, \sigma)$ гильбертово пространство измеримых функций $g(x)$, квадраты которых, умноженные на $\sigma(x)$, суммируемы в области Ω . Норму $g(x)$ в $L_2(\Omega, \sigma)$ введем обычным способом:

$$|g|_{L_2(\Omega, \sigma)} = \left(\int_\Omega g^2(x) \sigma(x) dx \right)^{1/2}.$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие D [E], квадратичная форма $a_{ij} \xi_i \xi_j$ положительно определена в любой замкнутой области $\bar{G}_\varepsilon \in C_{2, \alpha}$, коэффициенты $a_{ij}(x) \in C_{1, \alpha}(\bar{G} \setminus \bar{\gamma}_0)$, функции $c(x) > 0$, $\sigma(x) > 0$ и принадлежат классу $C_{0, \alpha}(\bar{G} \setminus \bar{\gamma}_0)$. Пусть функция $\sigma(x)$ суммируема в G и выполняется условие (2).

Тогда однородная задача $D_0 [E_0]$ имеет счетную неубывающую с ростом номера последовательность положительных собственных значений $\lambda^{(k)}$ с единственной предельной точкой в бесконечности и соответствующая им система собственных функций $u^{(k)}(x)$ является полной ортонормированной в гильбертовом пространстве $L_2(G, \sigma)$.

Доказательство этой теоремы осуществляется при помощи следующих регулярных задач. Пусть $\lambda_\varepsilon^{(k)}$ является k -м собственным значением, а $u_\varepsilon^{(k)}(x) \in C_2(\bar{G}_\varepsilon)$ является соответствующей собственной функцией, удовлетворяющей в области G_ε уравнению

$$Lu_\varepsilon^{(k)} = \lambda_\varepsilon^{(k)} \sigma(x) u_\varepsilon^{(k)}(x) \quad (7)$$

и подчиняющейся красному условию

$$u_{\varepsilon}^{(k)}(x)|_{\Gamma_{\varepsilon}} = 0. \quad (8)$$

Известно (^{7, 10, 11}), что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует счетная неубывающая с ростом номера k последовательность собственных значений $\lambda_{\varepsilon}^{(k)}$ с единственной предельной точкой в бесконечности, и существует соответствующая им полная ортонормированная в $L_2(G, \sigma)$ система собственных функций $u_{\varepsilon}^{(k)}(x) \in C_{2, \alpha}(\bar{G}_{\varepsilon})$. Из минимально максимального принципа (^{10, 11}) следует выполнение неравенства

$$\lambda_{\varepsilon''}^{(k)} \leq \lambda_{\varepsilon'}^{(k)} \quad \text{при} \quad \varepsilon'' < \varepsilon'. \quad (9)$$

Следовательно, при ε , монотонно стремящемся к нулю, существует

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{\varepsilon}^{(k)} = \lambda^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Так же как и в статье (⁶), доказывается, что это $\lambda^{(k)}$ является собственным значением однородной задачи (4), (6). Соответствующую собственную функцию $u^{(k)}(x)$ можно получить, привлекая априорные оценки (⁷), как предел сходящейся в $\bar{G} \setminus \bar{\gamma}_0$ вместе с первыми и вторыми производными последовательности $u_{\varepsilon_k}^{(k)}(x)$, $\{\varepsilon_k\} \subset \{\varepsilon_{k-1}\}$. Доказательство полноты найденной системы функций $u^{(k)}(x)$ в $L_2(G, \sigma)$ проводится, как в (⁶).

Теорема 2. Если выполнены все условия теоремы 1, то система собственных значений $\lambda^{(k)}$, определенных равенством (10), содержит все собственные значения задачи $D_0[E_0]$ и соответствующая система собственных подпространств, натянутых на найденные собственные функции $u^{(k)}(x)$, содержит все собственные подпространства указанной задачи.

Рассмотрим следующие неоднородные краевые задачи.

Задача $D[E]$. Найти функцию $u(x) \in C_2(G)$, удовлетворяющую в области G уравнению (1), непрерывную в замкнутой области $\bar{G}$ [ограниченную в G , непрерывную в $\bar{G} \setminus \bar{\gamma}_0$] и подчиняющуюся краевому условию

$$u(x)|_{\Gamma} = \varphi(x) \quad [u(x)|_{\gamma} = \varphi(x)]. \quad (11)$$

Теорема 3. Пусть выполнены все условия теоремы 1, ограничено в области G отношение $f(x)/c(x)$, функция $f(x) \in C_{0, \alpha}(\bar{G} \setminus \bar{\gamma}_0)$ и функция $\varphi(x)$ непрерывна на Γ [$\varphi(x)$ ограничена и непрерывна на γ].

Тогда: а) Если λ не является собственным значением однородной задачи $D_0[E_0]$, т. е. $\lambda \neq \lambda^{(k)}$ из (10) ни при каком $k = 1, 2, \dots$, то существует и притом единственная функция $u(x) \in C_{2, \alpha}(G)$, непрерывная в области $\bar{G}$ [ограниченная в G , непрерывная в $\bar{G} \setminus \bar{\gamma}_0$], удовлетворяющая в G уравнению (1) и подчиняющаяся условию (11).

б) Если λ является собственным значением задачи $D_0[E_0]$, т. е. $\lambda = \lambda^{(p+1)}$ из (10); $i = 0, 1, \dots, q-1$, $\lambda^{(p-1)} < \lambda < \lambda^{(p+q)}$, то для разрешимости задачи $D[E]$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\int_{\bar{G}} u_0(x) u^{(p+i)}(x) \sigma(x) dx = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, q-1,$$

где $u_0(x)$ — единственное решение задачи $D[E]$ при $\lambda = 0$.

Отдел математики с Вычислительным центром
Академии наук ТаджССР
Душанбе

Поступило
15 V 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. М. Смирнов, Вывождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, «Наука», 1966.
- ² Л. Г. Михайлов, Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами, Душанбе, 1963.
- ³ С. Г. Михлин, Вестн. Ленингр. ун-в., 3, № 8, 19 (1957).
- ⁴ М. И. Вишик, Математич. сборн., 35 (77), 3, 513 (1954).
- ⁵ Kazumasa Suzuki, Publ. Res. Inst. Math. Sci., Ser. A, 3, № 3, 299 (1968).
- ⁶ А. И. Ачильдиев, Сибирск. матем. журн., 12, № 1, 13 (1971).
- ⁷ О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралъцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», 1964.
- ⁸ М. В. Гелдыш, ДАН, 77, № 2, 181 (1951).
- ⁹ Г. Н. Яковлев, Дифференциальные уравнения, 4, № 1, 140 (1968).
- ¹⁰ С. Г. Михлин, Вариационные методы в математической физике, М., 1957.
- ¹¹ Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, 2, М.—Л., 1951.