

УДК 517.43+513.882

МАТЕМАТИКА

А. В. БУХВАЛОВ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОПЕРАТОРОВ С АБСТРАКТНОЙ НОРМОЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 19 V 1972)

1. Пусть X — нормированное пространство, E — K -пространство. Говорят, что линейный оператор U из X в E обладает абстрактной нормой, если существует элемент $|U| = \sup\{|Ux| : \|x\| \leq 1\}$ в E , называемый абстрактной нормой оператора U (⁽¹⁾, стр. 246). Через $H_A(X \rightarrow E)$ обозначим пространство всех таких операторов. Основной результат настоящей работы — теорема о представлении операторов с абстрактной нормой со значениями в пространстве измеримых функций. Этот результат обобщает известную теорему Л. В. Канторовича и Б. З. Вулиха (⁽²⁾, теорема VIII. 6. 32). В качестве следствий получаются представления так называемых межкоррелированных операторов и непрерывных функционалов на пространствах измеримых вектор-функций (типа $L^p(X)$) (⁽³⁾). Теорема 8 дает несколько эквивалентных условий для того, чтобы банахово сопряженное пространство X^* было пространством Филлипса (⁽⁴⁾).

2. В терминологии, касающейся полуупорядоченных пространств, мы будем придерживаться монографии (⁽¹⁾). Приведем некоторые определения и обозначения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

⟨1⟩ Пусть (T, Σ, μ) — пространство с полной σ -конечной мерой, $S(T, \Sigma, \mu)$ — K -пространство всех вещественных измеримых почти всюду (п.в.) конечных функций с обычным упорядочением ($e \geq 0$ означает элемент (⁽¹⁾ в $S(T, \Sigma, \mu)$), т. е. E — линейное подпространство в $S(T, \Sigma, \mu)$ такое, что: 1) из $|e_1| \leq |e_2|$, $e_1 \in S(T, \Sigma, \mu)$, $e_2 \in E$, следует $e_1 \in E$ и 2) для любого $e \in S(T, \Sigma, \mu)$ существует $e_1 \in E_+$ такой, что $0 < e_1 \leq |e|$.

⟨2⟩ Пусть на E имеется достаточное множество $\bar{E}$ вполне линейных функционалов (⁽¹⁾). Тогда $\bar{E}$ изоморфно пространству всех функций $e^* \in S(T, \Sigma, \mu)$ таких, что $\int |e(t)e^*(t)| d\mu(t) < +\infty$ для любого $e \in E$ (⁽⁵⁾). Далее мы всегда будем считать, что $\bar{E}$ реализовано таким образом.

⟨3⟩ Будем говорить, что E — KN -пространство (⁽¹⁾), если на E определена норма, причем из $|e_1| \leq |e_2|$ следует $\|e_1\| \leq \|e_2\|$. Норма в E удовлетворяет условию (A), если из $0 \leq e_n \downarrow 0$ следует $\|e_n\| \rightarrow 0$, $n = 1, 2, \dots$.

⟨4⟩ Всюду далее через X обозначается некоторое нормированное пространство, а через X' — некоторое подпространство в сопряженном X^* такое, что $\|x\|_X = \sup\{|\langle x, x^* \rangle| : x^* \in X', \|x^*\| \leq 1\}$. Будем говорить, что функция $z: T \rightarrow X$ X' -скалярно обладает свойством (P) (например, X' -измерима), если для любого $x^* \in X'$ числовая функция $x^* \circ z$ обладает свойством (P).

3. Дадим определение двух пространств вектор-функций.

Определение 1. Через $s(X')$ — $E(X)$ обозначим пространство всех X' -скалярно измеримых функций $z: T \rightarrow X$ таких, что функция $t \rightarrow \langle z(t), x^* \rangle$ при любом $x^* \in X'$ входит в E и множество $\{|\langle z, x^* \rangle| : x^* \in X', \|x^*\| \leq 1\}$ ограничено в K -пространстве E . Супремум этого множества назовем абстрактной нормой z и обозначим через $v(z)$.

Очевидно, что $s(X') - E(X)$ — линейное множество. Далее будем считать, что в $s(X') - E(X)$ отождествлены X -скалярно эквивалентные функции. Если $E - KN$ -пространство, то наделяем $s(X') - E(X)$ следующей нормой: $\|\vec{z}\| = \|v(\vec{z})\|_E$.

Определение 2. Через $E(X)$ обозначим пространство всех измеримых ⁽³⁾ функций $\vec{z}: T \rightarrow X$ таких, что функция $t \rightarrow \|\vec{z}(t)\|_X$ принадлежит E .

Ясно, что $E(X)$ — линейное подпространство в $s(X') - E(X)$, причем $\|\vec{z}(t)\|_X = v(\vec{z})(t)$ п.в., $\vec{z} \in E(X)$. Если $E - KN$ -пространство, то $E(X)$ рассматриваем с нормой, индуцированной из $s(X') - E(X)$.

Прежде чем перейти к вопросу о представлении операторов, приведем некоторые сведения о лифтингах. Пусть $e \in S(T, \Sigma, \mu)$, причем $0 < e(t) < +\infty$ для любого $t \in T$; $M_e(T, \Sigma, \mu)$ — пространство всех вещественных измеримых функций g таких, что $\text{vrai sup } |g(t)[e(t)]^{-1}| < +\infty$. Если ρ — лифтинг пространства $L^\infty(T, \Sigma, \mu)$ ⁽³⁾, то положим $\rho_e(g)(t) = e(t)\rho(g e^{-1})(t)$, $g \in M_e(T, \Sigma, \mu)$. Отображение ρ_e , которое будем называть лифтингом пространства $M_e(T, \Sigma, \mu)$, обладает почти всеми свойствами лифтинга ρ .

Пусть $U \in H_A(X \rightarrow E)$. Положим $e = |U|$, $e \in E$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < e(t) < +\infty$ при любом $t \in T$.

Теорема 1. Если $U \in H_A(X \rightarrow E)$, то существует функция $\vec{w}: T \rightarrow X^*$ такая, что

1) для любого $x \in X$ $\rho_e(Ux)(t) = \langle x, \vec{w}(t) \rangle$ при любом $t \in T$;

2) $|U|(t) = \|\vec{w}(t)\|_{X^*}$ п.в.;

3) $\vec{w} \in s(X) - E(X^*)$ и $v(\vec{w}) = |U|$.

Теорема 2. Отображение P , сопоставляющее каждому элементу $\vec{w} \in s(X) - E(X^*)$ оператор $(P\vec{w})(x) = \langle x, \vec{w} \rangle$, $x \in X$, является алгебраическим изоморфизмом пространства $s(X) - E(X^*)$ на $H_A(X \rightarrow E)$, причем $v(\vec{w}) = |P\vec{w}|$.

Таким образом, установлена общая форма оператора с абстрактной нормой. Теорема 2 является обобщением теоремы Л. В. Канторовича и Б. З. Вулиха ⁽²⁾ *. Из теоремы 1 можно получить обобщения теорем 3, 4 работы ⁽⁶⁾. Из теоремы 1 получается также

Теорема 3. Пусть X, Y — нормированные пространства, $E - KN$ -пространство с условием (A), U — слабо компактный оператор из X в Y , $V \in H_A(Y \rightarrow E)$. Тогда оператор $W = V \circ U$ компактен.

Следствие. Пусть $E - KN$ -пространство с условием (A), $U \in H_A(E \rightarrow E)$. Тогда оператор U^2 компактен.

4. Рассмотрим еще один класс операторов.

Определение 3. Линейный оператор $U: E \rightarrow X$ называется мажорированным, если существует положительный функционал e_v^* на E такой, что $\|Ue\|_X \leq \langle e, e_v^* \rangle$, $e \in E$.

Если U — мажорированный оператор, то для любого $e \in E_+$ положим

$$[U](e) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|Ue_k\| : e_1, \dots, e_n \in E_+; e = e_1 + \dots + e_n \right\}.$$

Легко видеть, что $[U]$ можно продолжить до линейного положительного функционала на E , для которого мы сохраняем старое обозначение. Пространство мажорированных операторов таких, что $[U] \in E_+$, обозначим через $M_{\bar{E}}(E \rightarrow X)$. Пусть $\bar{E}$ тотально на E .

Теорема 4. Отображение J , сопоставляющее каждому оператору $U \in M_{\bar{E}}(E \rightarrow X^*)$ сужение сопряженного оператора U^* на X , является

* Многие авторы обобщали вышеупомянутую теорему, но без техники лифтинга, развитой в ⁽³⁾, они не могли избавиться от предположения сепарабельности пространства с мерой или же от сильных ограничений на пространство X .

алгебраическим изоморфизмом пространства $M_{\bar{E}}(E \rightarrow X^*)$ на $H_A(X \rightarrow \bar{E})$, причем $[U] = |JU|$.

Теорема 4 обобщает некоторые результаты работы (7). Из теорем 2, 4 получается

Теорема 5. *Отображение Q , сопоставляющее каждому элементу $\tilde{w} \in s(X) - \bar{E}(X^*)$ оператор $Q\tilde{w}$ по формуле*

$$\langle (Q\tilde{w})e, x \rangle = \int e(t) \langle x, \tilde{w}(t) \rangle d\mu(t), \quad e \in E, \quad x \in X, \quad (*)$$

является алгебраическим изоморфизмом пространства $s(X) - \bar{E}(X^)$ на $M_{\bar{E}}(E \rightarrow X^*)$, причем $v(\tilde{w}) = [Q\tilde{w}]$.*

Теорема 1 позволяет выбрать в формуле (*) «хорошего» представителя $\tilde{w}$. Если E — банахово KN -пространство с условием (A), то, в силу следствия из леммы 3 (7) и теоремы IX.4.4 (4), получаем, что пространство $M_{\bar{E}}(E \rightarrow X^*)$ совпадает с пространством суммирующих операторов $S(E \rightarrow X^*)$ (7), причем легко видеть, что $\|[U]\|_{E^*} = \|U\|_{S(E \rightarrow X^*)}$, $U \in S(E \rightarrow X^*)$. Из теоремы 5 получаем

Следствие. Пусть E — банахово KN -пространство с условием (A). Тогда отображение Q из теоремы 5 осуществляет изометрию пространства $s(X) - E^*(X^*)$ на $S(E \rightarrow X^*)$.

В случае $E = L^1(T, \Sigma, \mu)$ пространство $S(L^1 \rightarrow X^*)$ совпадает с пространством линейных непрерывных операторов, и мы получаем классическую теорему Данфорда — Петтиса (8).

5. Применим теперь полученные теоремы к задаче о представлении непрерывных функционалов на пространстве $E(X)$. Пусть E — KN -пространство; тензорное произведение $E \otimes X$, наделенное нормой, введенной В. Л. Левинным (9), изометрически вкладывается в $E(X)$.

Теорема 6. Для любого нормированного пространства X тензорное произведение $E \otimes X$ плотно в $E(X)$ тогда и только тогда, когда в E выполнено условие (A).

Используя эту теорему и следствие из теоремы 5, а также теорему 3 (9)*, получаем следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть E — банахово KN -пространство с условием (A). Тогда отображение R , сопоставляющее каждому элементу $\tilde{w} \in s(X) - E^*(X^*)$ функционал

$$(R\tilde{w})(\vec{z}) = \int \langle \vec{z}(t), \tilde{w}(t) \rangle d\mu(t), \quad \vec{z} \in E(X),$$

является изометрией пространства $s(X) - E^(X^*)$ на $E(X)^*$.*

Теорема 7 обобщает результаты Гальперина и Эллиса (10) (в случае L^p см. также (8), гл. VII, теорема 9).

6. Естественно поставить вопрос, какие условия требуется наложить на пространство X , чтобы в полученных теоремах представления можно было гарантировать измеримость соответствующих вектор-функций. Ответ дает следующая

Теорема 8. Пусть X — банахово пространство. Эквивалентны следующие утверждения:

1) для любого линейного непрерывного оператора $U: L^1(T, \Sigma, \mu) \rightarrow X^*$ существует $\tilde{w} \in L^\infty(T, \Sigma, \mu)(X^*)$ такая, что **

$$Ue = \int e(t) \tilde{w}(t) d\mu(t), \quad e \in L^1(T, \Sigma, \mu);$$

2) если E — банахово KN -пространство с условием (A) (фундамент в $S(T, \Sigma, \mu)$), то любой оператор $U \in H_A(X \rightarrow E)$ является компактным;

3) если функция $w: T \rightarrow X^*$ является X -скалярно измеримой, то су-

* Как доказал В. А. Гейлер, условие В из (9) выполнено в любом KN -пространстве и тем самым теорема 3 применима.

** Имеется в виду интеграл Бохнера (3).

существует X -скалярно эквивалентная ей измеримая функция $\bar{w}_1: T \rightarrow X^*$, причем $v(\bar{w})(t) = \|\bar{w}_1(t)\|$ п. в.

Отметим, что для доказательства $2 \Rightarrow 1$ мы пользуемся теоремой 2 ⁽⁶⁾. Хорошо известно ⁽⁴⁾, что условие 1) теоремы 8 выполнено, например, если X^* сепарабельно или рефлексивно. Теорема 8 обобщает некоторые результаты из ⁽⁴⁾.

Замечания. 1) Теоремы представления, полученные в настоящей работе, переносятся на случай пространств над комплексным полем. 2) Условие σ -конечности меры μ можно заменить более слабыми условиями, сводящимися, по сути дела, к существованию лифтинга.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. Б. З. Вулиху за постоянное внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Ждапова

Поступило
10 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961.
² Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М., 1950. ³ N. Dinăşileanu, Vector Measures, Berlin, 1966. ⁴ A. Grothendieck, Mem. Am. Math. Soc., 16 (1955). ⁵ Б. З. Вулих, Г. Я. Лозановский, Матем. сборн., 84 (126), 3, 331 (1971). ⁶ В. Б. Коротков, ДАН, 198, № 4, 755 (1971). ⁷ В. Л. Левин, Сиб. матем. журн., 10, № 4, 903 (1969). ⁸ A. C. Ionescu-Tulcea, Topics in the Theory of Lifting, Berlin, 1969. ⁹ В. Л. Левин, Тр. Московск. матем. общ., 20, 43 (1969). ¹⁰ I. Halperin, Proc. Int. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, 1960.