Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 1

УДК 533.6+512.9 *АЭРОДИНАМИКА*

А. А. МАРКОВ

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ТЕОРИИ ВЗРЫВА В АТМОСФЕРЕ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 14 VII 1971)

1. В работах Ю. П. Райзера ([1,2]) рассматривался взрыв с учетом неоднородности атмосферы в поздней стадии, когда ударная волна уходит от точки взрыва на достаточно большие расстояния и выделяющаяся при взрыве энергия выпадает из числа определяющих параметров. Были построены автомодельные решения, описывающие движения плоской ударной волны вверх и вниз в экспоненциальной атмосфере.

Автомодельные решения не учитывают влияния противодавления и земного тяготения и не удовлетворяют начальным условиям задачи, формулируемой ниже (см. (1), (2), (3)).

Представляет интерес выяснить, в каком смысле точное решение задачи (1), (2), (3) является близким к автомодельным решениям. В настоящей работе этот вопрос изучен в линейном приближении.

2. Постановка задачи о взрыве. Рассмотрим адиабатическое движение невязкого совершенного газа, вызванное точечным взрывом в неоднородной атмосфере, плотность и давление которой меняются по экспоненциальному (барометрическому) закону. Эффектами теплопроводности, излучения, ионизации и др. пренебрегаем. Возмущенная взрывом область пространства отделяется от невозмущенной области ударной волной, которая перемещается со временем. Будем рассматривать плоское движение газа вдоль оси x, направленной в сторону уменьшения плотности.

В безразмерных переменных ([3]) уравнения движения газа и соотношения на ударной волне записываются следующим образом:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+A_g=0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}+u\frac{\partial P}{\partial x}+\gamma P\frac{\partial u}{\partial x}=0; \tag{1}$$

$$\rho=e^{-\varphi}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left[1+\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{A_p}{\varphi'^2}\right]^{-1},\quad P=e^{-\varphi}\frac{2\varphi'^2}{\gamma+1}\left[1-\frac{(\gamma-1)A_p}{2\varphi'^2}\right],$$

$$u=\frac{2\varphi'}{\gamma+1}\left[1-\frac{\gamma A_p}{\varphi'^2}\right]\varphi'=\frac{d\varphi}{dt}. \tag{2}$$

Здесь $\varphi(t)$ — координата ударной волны, распространяющаяся в сторону уменьшения плотности, A_g, A_p — некоторые безразмерные параметры, учитывающие влияние земного тяготения и противодавления соответственно. Соотношения на ударной волне, движущейся в сторону увеличения плотности, получаются из (2) заменой φ на $\varphi_-(t)$, где $\varphi_-(t)$ — координата волны, движущейся вниз. Предположим, что в начальный момент времени заданы распределения

$$\rho^{(0)}(x),\quad u^{(0)}(x),\quad P^{(0)}(x),\quad \varphi_-(0)\leqslant x\leqslant\varphi(0),\quad t=0. \tag{3}$$

Начальными данными (3) могут служить результаты численного расчета движения газа ([4]).

3. Перейдем в (1), (2) к новым переменным, аналогичным автомодельным переменным (ср. ([1]))

$$\xi = x - \varphi, \quad \rho = Re^{-\varphi}, \quad u = V\varphi', \quad p = P\varphi'^2 e^{-\tau}. \tag{4}$$

При записи уравнений (1) и соотношений (2) в новых переменных будем различать два случая.

1^0). Пренебрегаем влиянием противодавления и земного притяжения, т. е. $A_p = A_g = 0$; 2^0) $A_p^2 + A_g^2 > 0$.

Преобразованные уравнения движения и условия на волне можно представить следующим образом:

$$q(\tau, \varepsilon)\frac{\partial R}{\partial \tau} + (V-1)\frac{\partial R}{\partial \xi} + R\frac{\partial V}{\partial \xi} - R = 0, \quad q(\tau, \varepsilon) = 1 - \varepsilon + 2\varepsilon\omega(\tau),$$

$$q(\tau, \varepsilon)\frac{\partial V}{\partial \tau} + (V-1)\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{1}{R}\frac{\partial P}{\partial \xi} + \omega(\tau)V + \varepsilon A_g e^{-\tau} = 0; \tag{4}$$

$$q(\tau, \varepsilon)\frac{\partial P}{\partial \tau} + (V-1)\frac{\partial P}{\partial \xi} + \gamma P\frac{\partial V}{\partial \xi} + P(2\omega(\tau) - 1) = 0; \tag{5}$$

$$\xi = 0, \quad R = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(1 + \varepsilon\frac{2\gamma A_p}{\gamma-1}e^{-\tau}\right)^{-1}, \quad V = \frac{2}{\gamma+1}(1 - \varepsilon\gamma A_p e^{-\tau}),$$

$$P = \frac{2}{\gamma+1}\left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\varepsilon A_p e^{-\tau}\right),$$

где $\omega(\tau) = \varphi''/\varphi'^2$, $\varepsilon = 0$ или 1; в случае 1^0) $\tau \equiv \varphi$, $\varepsilon = 0$, в случае 2^0) $\tau \equiv \ln\varphi'^2$, $\varepsilon = 1$.

Предположим, что при фиксированном ξ существует предел

$$\begin{gathered}\tau \to \infty, \quad R(\tau, \xi) \to R_0(\xi), \quad V(\tau, \xi) \to V_0(\xi), \\ P(\tau, \xi) \to P_0(\xi), \quad \omega(\tau) \to \omega_0 = \mathrm{const};\end{gathered} \tag{6}$$

тогда предельные величины R_0, V_0, P_0, ω_0 удовлетворяют тем же уравнениям и граничным условиям, что и автомодельное решение ([1]) для эйлеровых переменных, причем $\omega_0 = 1/\alpha$, где α — показатель автомодельности.

Проведем линеаризацию в уравнениях (4) в окрестности автомодельного решения (R_0, V_0, P_0, ω_0). Обозначим возмущение через

$$W_1 = (R_1(\tau, \xi), \quad V_1(\tau, \xi), \quad P_1(\tau, \xi), \quad \omega_1(\tau)). \tag{7}$$

Для функций R_1, V_1, P_1 получим линейную гиперболическую систему дифференциальных уравнений с параметром $\omega_1(\tau)$. Граничные условия ставятся при $\tau = \tau(t)|_{t=0}$, $0 \leqslant \xi \leqslant c$, $c > \eta_0$, см. (11), и при $\xi = 0, \tau \geqslant \tau(t)|_{t=0} = \tau_0$.

Ограничимся здесь рассмотрением случая 1^0). Методами теории характеристик доказывается

Теорема 1. *Смешанная краевая задача для возмущения W_1 имеет единственное решение в цилиндре $D_c = \{\tau, \xi: \tau \geqslant \tau_0, \ 0 \leqslant \xi \leqslant c\}$. Это решение имеет непрерывные производные, если только для граничных данных выполнены соответствующие условия согласования при $\xi = 0, \tau = \tau_0$. Функции $|R_1(\tau, \xi)|$, $|V_1(\tau, \xi)|$, $|P_1(\tau, \xi)|$, $|\omega_1(\tau)|$ при каждом фиксированном значении ξ могут расти при $\tau \to \infty$ не быстрее экспоненты $Ke^{\sigma_1\tau}$, где постоянные K, σ_1 зависят от c и от автомодельного решения.*

Для того чтобы уточнить поведение W_1 при $\tau \to \infty$, применим преобразование Лапласа

$$\tilde{W}(\xi, \lambda) = \int_{\tau_0}^{\infty} W_1(\tau, \xi)e^{-\lambda\tau}d\tau, \quad \tilde{W} = (\tilde{R}, \tilde{V}, \tilde{P}, \Omega). \tag{8}$$

Введением лагранжевой автомодельной переменной $\eta = e^{\varphi}\int\limits_{\varphi}^{\infty} \rho\, dx$ систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\tilde{R}$, $\tilde{V}$, $\tilde{P}$, Ω удается свести к одному уравнению для функций $\tilde{r}(\eta, \lambda) = 1 / \tilde{R}(\eta, \lambda)$, $\Omega(\lambda)$, а именно:

$$L_\lambda \tilde{r} \equiv (a(\eta) - \eta^2)\tilde{r}'' + [2a' - \eta(3 + \omega_0 + 2\lambda)]\tilde{r}' + \\ + [a'' - (1+\lambda)(1 + \omega_0 + \lambda)]\tilde{r} = -\Omega(\lambda) g + F, \tag{9}$$

где $a(\eta) = \gamma P_0 R_0$; $g(\eta, \lambda) = V_0' - (AR_0^\gamma)''$, $A(\eta, \lambda) = -2\int\limits_1^\eta \left(\frac{s}{\eta}\right)^{2\omega_0+\gamma-1+\lambda} \times \frac{P_0(s)}{sR_0^\gamma(s)} ds$. Функция $F(\eta, \lambda)$ зависит от начальных данных для возмущения W_1 при $\tau = \tau_0$. Уравнение (9) дополняется граничными условиями при $\eta = 1$ ($\xi = 0$), а именно:

$$\eta = 1, \quad \tilde{r} = 0, \quad \tilde{r}' = \Omega(\lambda) f_0 + f_1, \tag{10}$$

где $f_0 = -6(\gamma - 1) / (\gamma + 1)^2$, f_1 зависит от начальных данных для W_1 при $\tau = \tau_0$.

Из свойств автомодельного решения ([1]), следует, что существует единственное значение $\eta = \eta_0$, при котором коэффициент при старшей производной в (9) имеет нуль первого порядка. Заметим, что числа η_0, $P_0(\eta_0)$ совпадают с координатами особой седловой точки в уравнении, определяющем автомодельное решение ([1]).

Изучение свойств фундаментальной системы решений $E(\eta, \lambda)$, $\hat{E}(\eta, \lambda)$ уравнения (9) как функций параметра λ позволяет сформулировать следующее утверждение о свойствах резольвенты задачи (9), (10). Пусть

$$a_1(\eta_0) = \lim_{\eta\to\eta_0} (a(\eta) - \eta^2)/(\eta_0 - \eta), \quad \sigma_0 = {}^1/_2(1 - \omega_0 - a_1(\eta_0)/\eta_0), \tag{11}$$

$\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Теорема 2. *При каждом фиксированном значении* η *функции* $\tilde{r}(\eta, \lambda)$, $\Omega(\lambda)$, *удовлетворяющие* (9), (10) *в области* $\sigma_0 - \varepsilon \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \sigma_1$, *являются аналитическими функциями параметра* λ *всюду, кроме, быть может, конечного числа полюсов, которые являются корнями уравнения*

$$\Delta(\lambda) = 0, \tag{12}$$

где

$$\Delta(\lambda) = E'(1, \lambda)\hat{E}(1, \lambda)G_0(\lambda) - E(1, \lambda)(\hat{E}'(1, \lambda)G_0(\lambda) + f_0),$$

$$G_0(\lambda) = \frac{1}{\beta(\lambda)}\int\limits_1^{\eta_0} E(s, \lambda)(\eta_0 - s) g(s, \lambda) \exp K(s, \lambda) \frac{ds}{a(s) - s^2},$$

$$K(s, \lambda) = \int\limits_1^s \left[\frac{(1 - \omega_0 - 2\lambda)t}{a_1(t)} - 1 - 2(t - \eta_0)\frac{a_1'(t)}{a_1(t)}\right]\frac{dt}{\eta_0 - t},$$

$\beta(\lambda) = (2\eta_0 / a_1(\eta_0))(\lambda - \sigma_0)$, $E'(\eta, \lambda) = dE/d\eta$, $\hat{E}'(\eta, \lambda) = d\hat{E}/d\eta$, $E(\eta, \lambda)$ — решение уравнения $L_\lambda \tilde{r} = 0$, ограниченное при $\eta \to \eta_0$, $\sigma_0 < \operatorname{Re}\lambda \leqslant \sigma_1$.

Замечание. Из свойств автомодельного решения ([1]) следует, что $\sigma_0 < 0$.

Оценки при $|\lambda| \to \infty$, $\sigma_0 < \operatorname{Re}\lambda \leqslant \sigma_1$ для функций $E(\eta, \lambda)$, $\hat{E}(\eta, \lambda)$ позволяют построить асимптотику возмущения $W_1(\tau, \eta)$ около автомодельного решения $W_0(\eta) = (R_0(\eta), V_0(\eta), P_0(\eta), \omega_0)$ при $\tau \to \infty$.

Приведем результат для $\tilde{r}_1(\tau, \eta) = 1 / R_1$ (см. (7)).

Теорема 3. *Функция $r_1(\tau, \eta)$ при $\tau \to \infty$ имеет следующую асимптотику:*

$$r_1(\tau, \eta) = \sum_{j=1}^{n} (T_{j0}(\eta) + \tau T_{j1}(\eta) + \ldots + \tau^{m_j-1} T_{j\, m_j-1}(\eta)) e^{\lambda_j(\tau-\tau_0)} + \tilde{\tilde{r}}(\tau, \eta),$$

где остаток $\tilde{\tilde{r}}(\tau, \eta)$ допускает оценку $|\tilde{\tilde{r}}| = O(e^{(\sigma_0-\varepsilon)\tau})$, ε — сколь угодно малое положительное число.

$$T_{jk}(\eta) = \frac{1}{k!\,(m_j - 1 - k)!} \lim_{\lambda \to \lambda_j} \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_j-1-k} [\tilde{r}(\eta, \lambda) \cdot (\lambda - \lambda_j)^{m_j}], \qquad (13)$$

λ_j — корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ в полосе $\sigma_0 < \operatorname{Re}\lambda \leqslant \sigma_1$, m_j — кратность λ_j.

Исследование свойств $E(\eta, \lambda)$, $\hat{E}(\eta, \lambda)$ при $\eta \to \infty$ показывает, что

$$|E|_j |\hat{E}| = O(\eta^{-1-\lambda}); \qquad |E'|_j |E|' = O(\eta^{-2-\lambda}). \qquad (14)$$

Используя (14) и формулы (12), (13), оценим рост функций $T_{jk}(\eta)$ при $\eta \to \infty$ (см. (13)). $|T_{jk}(\eta)| = O(\eta^{\alpha_{jk}})$, где α_{jk} зависит от автомодельного решения.

В работе ([4]) на основе численного исследования задачи (1), (2), (3) обнаружен выход решения на автомодельный режим ([1]) в области, примыкающей к фронту волны. На определенной стадии проведения расчетов ([4]) возникают трудности, связанные с ростом диаметра области возмущенного взрывом газа и большой скоростью движения фронта ударной волны. Будем называть эти явления эффектами разгона.

Для приближенного описания параметров течения газа в поздней предпрорывной и послепрорывной стадиях представляется важным оценить область применимости автомодельных решений и степень их близости к точному решению задачи. Это позволит, в частности, «перенести» граничные условия с верхней волны на некоторую вспомогательную границу, чтобы преодолеть трудности численного исследования, обусловленные эффектами разгона.

Из формулы (14) следует неравномерность стремления точного решения к автомодельному режиму. Однако, зная величины λ_j и α_{jk}, можно оценить разность между точным и автомодельным решениями при различных значениях τ и η.

4. Остановимся на других результатах и обобщениях. Случай 2°) ($A_p^2 + A_g^2 > 0$) исследуется аналогично; соответствующее спектральное уравнение для функции $\tilde{r}(\eta, \lambda)$ сходно с (9). Аналогичным методом рассмотрена задача об устойчивости автомодельного решения ([2]), описывающего движения ударной волны вниз.

Приведенный метод может быть обобщен на случай исследования устойчивости автомодельных решений У. Д. Хейза ([5]), описывающих течения газа в трубках с экспоненциально меняющейся площадью поперечного сечения.

Автор выражает благодарность В. Б. Лидскому и Л. А. Чудову за интерес к работе и полезные обсуждения.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
7 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. П. Райзер, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 4, 49 (1964). [2] Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, 2-е изд., М., 1966. [3] Л. И. Седов, Методы подобия и размерности в механике, 6-е изд., М., 1967. [4] Х. С. Кестенбойм, З. Н. Кузина, Мех. жидкости и газа, № 5 (1971). [5] У. Д. Хейз, Механика, сборн. № 6, 112, 51 (1968).