

УДК 513.88 : 513.83 + 517.948.35 + 517.948.5

МАТЕМАТИКА

Л. Е. ЛЕРЕР

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СПЕКТРОВ КОНЕЧНЫХ УСЕЧЕНИЙ ОПЕРАТОРОВ ВИНЕРА — ХОПФА

(Представлено академиком Н. Н. Мусхелишвили 20 III 1972)

Пусть $\mathfrak{B}$ — банахово пространство, A — линейный ограниченный оператор в $\mathfrak{B}$ и $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность конечномерных операторов, сильно сходящихся к A . В настоящей работе исследуются некоторые вопросы, связанные с асимптотическим поведением собственных чисел операторов A_n при $n \rightarrow \infty$. Особое внимание уделяется случаю, когда A — дискретный оператор Винера — Хопфа или сингулярный интегральный оператор.

1. Введем следующие обозначения: M — множество всех ограниченных измеримых функций на единичной окружности Γ , L_2 — гильбертово пространство всех измеримых и суммируемых с квадратом функций на Γ , H_2 — пространство Харди. Для всякого компакта G в комплексной плоскости через $A(G)$ обозначим алгебру всех функций, непрерывных на G и регулярных во всех внутренних точках G .

Если $\mathfrak{B}$ — некоторое линейное множество, то через $(\mathfrak{B})_n$ обозначим множество всех n -мерных векторов с координатами из $\mathfrak{B}$, а через $(\mathfrak{B})_{n \times n}$ — множество всех $(n \times n)$ -матриц с элементами из $\mathfrak{B}$. Если $\mathfrak{B}$ — гильбертово пространство, то в $(\mathfrak{B})_n$ можно ввести скалярное произведение векторов как сумму скалярных произведений соответствующих компонент.

Пусть $A(\zeta) \in (M)_{n \times n}$. Через W_A обозначим матричный оператор Винера — Хопфа, действующий в $(H_2)_n$ по правилу $(W_A f)(\zeta) = P A(\zeta) f(\zeta)$, $f(\zeta) \in (H_2)_n$, где P — ортопроектор, проектирующий $(L_2)_n$ на $(H_2)_n$.

Система векторов $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$, где $g_{n+l} = \{\delta_{pl} e^{ikl}\}_{p=1}^n$, $k=0, 1, \dots; l=0, 1, \dots, n-1$, образует ортонормированный базис в $(H_2)_n$. Матрицу оператора W_A в базисе $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$ можно записать в блочно-треугольной форме $\|a_{j-k}\|_{k=0}^{\infty}$, где блоки a_j , $j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$, — матричные коэффициенты Фурье матрицы-функции $A(\zeta)$. Если $\mathfrak{F}_m$ — nm -мерное подпространство, натянутое на векторы g_{n+l} , $k=0, 1, \dots, m-1$; $l=0, 1, \dots, n-1$, то через P_m обозначим ортопроектор, проектирующий $(H_2)_n$ на $\mathfrak{F}_m$, а через $W_A^{(m)}$ — сужение оператора $P_m W_A P_m$ на $\mathfrak{F}_m$.

Следующая теорема характеризует асимптотическое распределение спектров операторов $W_A^{(m)}$, т. е. собственных чисел $(nm \times nm)$ -матрицы $\|a_{j-k}\|_{k=0}^{m-1}$.

Теорема 1. Пусть $A(\zeta) \in (M)_{n \times n}$ и G — некоторый компакт, содержащий собственные числа $\lambda_j(A(\zeta))$, $j=1, 2, \dots, n$, матрицы $A(\zeta)$ при каждом ζ , $|\zeta|=1$, и собственные числа $\{\lambda_j^{(m)}\}_{j=1}^{nm}$ операторов $W_A^{(m)}$, $m=1, 2, \dots$. Если дополнение к G связано или состоит из конечного числа связанных компонент G_j , $j=1, 2, \dots, k$, в каждой из которых найдется хотя бы одна точка c_j такая, что $\sup_{m \geq 1} \|(W_A^{(m)} - c_j I_m)^{-1}\| < \infty^*$, $j=1, 2, \dots, k$, то для любой функции $F(\lambda) \in A(G)$

* Через I_m обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{F}_m$.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{mn} F(\lambda_j^{(m)}) = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sp} F(A(e^{i\varphi})) d\varphi^*. \quad (1)$$

Условия, накладываемые в теореме 1 на область G , существенны.

Отметим, что теорема 1 является обобщением известных результатов Г. Сеге ** (см., например, (1), стр. 87), установившего формулу (1) для случая $n = 1$ и вещественной функции $A(\xi)$.

Очевидно, соотношение (1) выполняется для всякой функции $F(\lambda)$, непрерывной в круге $|z| \leq \rho$, $\rho = \sup_{\xi \in \Gamma} \|A(\xi)\|$, и регулярной внутри него.

Указанный класс функций в ряде случаев можно существенно расширить.

Пусть $A(\xi) \in (M)_{n \times n}$. При каждом фиксированном ξ через $\Omega_A(\xi)$ обозначим числовую область оператора, порожденного матрицей $A(\xi)$ в n -мерном унитарном пространстве. Замкнутую выпуклую оболочку всех множеств $\Omega_A(\xi)$, $\xi \in \Gamma$, обозначим $\operatorname{ess} \operatorname{co} A(\xi)$ и положим $\operatorname{ess} \operatorname{co} A(\xi) = \Pi \operatorname{co} B(\xi)$, $B(\xi) \in \tilde{A}$.

где $\tilde{A}$ — класс всех матриц-функций из $(M)_{n \times n}$, совпадающих с $A(\xi)$ почти всюду на Γ .

1°. Спектр всех операторов $W_A^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, содержится в $\operatorname{ess} \operatorname{co} A(\xi)$.

Из этого предложения и теоремы 1 вытекает, что

Соотношение (1) имеет место для любой функции $F(\lambda)$, непрерывной на множестве $\operatorname{ess} \operatorname{co} A(\xi)$ и регулярной внутри него.

Для случая непрерывных матриц-функций $A(\xi)$ с помощью некоторых результатов о локализации спектров операторов $W_A^{(m)}$ можно произвести дальнейшее расширение класса функций $F(\lambda)$, для которых выполняется (1). Приведем здесь соответствующий результат лишь в случае $n = 1$.

Если функция $A(\xi)$ непрерывна, то кривая $A(\xi)$ разбивает комплексную плоскость на ряд связанных компонент $\{D_j\}_{j=1}^{\infty}$ таких, что индекс функции *** $A(\xi) - \lambda$ сохраняет постоянное значение (называемое индексом компоненты) для всех точек λ из фиксированной компоненты D_j .

2°. Если функция $A(\xi)$ непрерывна, то соотношение (1) имеет место для любой функции $F(\lambda)$, непрерывной на множестве $\operatorname{co} A(\xi)$ и регулярной во внутренних точках компакта, полученного удалением из комплексной плоскости конечного числа компонент D_j (среди них и неограниченной компоненты), обладающих ненулевым индексом.

2. Пусть $A(\xi), B(\xi) \in (M)_{n \times n}$. Оператор $W_{A, B}(\tilde{W}_{A, B})$, действующий в $(L_2)_n$ по правилу $(W_{A, B}f)(\xi) = PA(\xi)f(\xi) + QB(\xi)f(\xi)$ (соответственно $(\tilde{W}_{A, B}f)(\xi) = A(\xi)Pf(\xi) + B(\xi)Qf(\xi)$) называется матричным парным (транспонированным к парному) оператором. Через $P_{r, s}$ обозначим ортопроектор, проектирующий $(L_2)_n$ на $(r+s)n$ -мерное подпространство $\mathfrak{F}_{r, s}$, натянутое на векторы g_{nh+l} , $k = -r, -r+1, \dots, 0, 1, \dots, s-1$; $l = 0, 1, \dots, n-1$.

Распределение спектров операторов $P_{r, s}W_{A, B}P_{r, s}|_{\mathfrak{F}_{r, s}}$ и $P_{r, s}\tilde{W}_{A, B}P_{r, s}|_{\mathfrak{F}_{r, s}}$ характеризуется формулой, близкой к (1). Ниже при-

* Здесь, по определению, полагаем, $\operatorname{sp} F(A(\xi)) = \sum_{j=1}^n F(\lambda_j(A(\xi)))$.

** В методе, использованном Г. Сеге для доказательства формулы (1) в случае вещественной функции $A(\xi)$, центральную роль играет полученное им же предельное соотношение

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \det W_A^{(m+1)} / \det W_A^{(m)} = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln A(e^{i\varphi}) d\varphi \right], \quad A(\xi) \geq 0; \quad A(\xi), \quad \ln A(\xi) \in L_1$$

которое неоднократно обобщалось на различные классы функций и матриц-функций (см. (2-7)). В общем случае комплекснозначных функций (и матриц-функций) этот метод не удается реализовать. Доказательство теорем настоящей заметки основано на некотором операторном подходе.

*** Определение индекса функции см., например, в (7).

водится соответствующий результат для сингулярных интегральных операторов (т. е. операторов $K_{A, B}$, действующих в $(L_2)_n$ по правилу

$$(K_{A, B}f)(\zeta) = A(\zeta)f(\zeta) + \frac{B(\zeta)}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi(z)}{z - \zeta} dz, \quad \text{которые известным способом}$$

(см., например, (7)) могут быть представлены в виде парных операторов.

Теорема 2. Пусть $A(\zeta), B(\zeta) \in (M)_{n \times n}$, $K_{A, B}$ — сингулярный интегральный оператор в $(L_2)_n$ и $\{r_m\}_{m=1}^\infty$ и $\{s_m\}_{m=1}^\infty$ — две последовательности натуральных чисел, из которых хотя бы одна стремится к бесконечности, причем существует (конечный или бесконечный) предел $\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} r_m s_m^{-1}$.

Пусть G — компакт, содержащий все точки $\lambda_i(A(\zeta) + B(\zeta))$ и $\lambda_j(A(\zeta) + B(\zeta))$, $j = 1, 2, \dots, n$; $|\zeta| = 1$, и собственные числа $\lambda_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \dots, n(r_m + s_m)$, операторов $K_{A, B}^{(r_m, s_m)} = P_{r_m, s_m} K_{A, B} P_{r_m, s_m}^*$, $m = 1, 2, \dots$

Если дополнение к G связано или состоит из конечного числа связных компонент G_j , $j = 1, 2, \dots, k$, в каждой из которых найдется хотя бы одна точка c_j такая, что $\sup_{m \geq 1} \|(K_{A, B}^{(r_m, s_m)} - c_j I_{r_m, s_m})^{-1}\| < \infty$, то для любой функции $F(\lambda) \in A(G)$

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{n(r_m + s_m)} F(\lambda_j^{(n)}) \right] / [n(r_m + s_m)] \right\} = \\ & = \frac{1}{2\pi n} \left\{ \alpha \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sp} F[A(e^{i\varphi}) + B(e^{i\varphi})] d\varphi + (1 - \alpha) \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sp} F[A(e^{i\varphi}) - B(e^{i\varphi})] d\varphi \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\alpha = (1 + \gamma)^{-1}$.

Конкретизация классов функций $F(\lambda)$, для которых имеет место (2), может быть проведена здесь по аналогии с заключительной частью п. 2.

3. В этом пункте приводятся общие предложения об асимптотическом распределении спектров, характеризующие некоторую устойчивость этого распределения при вполне непрерывном возмущении.

Пусть $\{d_n\}_{n=1}^\infty$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, и для каждого номера n заданы два набора комплексных чисел $\{\lambda_j^{(n)}\}_{j=1}^{d_n}$ и $\{\mu_j^{(n)}\}_{j=1}^{d_n}$, $n = 1, 2, \dots$. Пусть G — некоторый компакт, содержащий все точки $\lambda_j^{(n)}$ и $\mu_j^{(n)}$, $j = 1, 2, \dots, d_n$; $n = 1, 2, \dots$. Последовательности наборов чисел $\{\lambda_j^{(n)}\}_{j=1}^{d_n}$ и $\{\mu_j^{(n)}\}_{j=1}^{d_n}$, $n = 1, 2, \dots$, будем называть равнораспределенными на G , если для любой функции $F(\lambda) \in A(G)$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d_n} \sum_{j=1}^{d_n} [F(\lambda_j^{(n)}) - F(\mu_j^{(n)})] = 0. \quad (3)$$

Через $\mathcal{L}(\mathfrak{B})$ обозначим алгебру всех линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$. Если последовательность операторов $\{B_n\}_{n=1}^\infty$, $B_n \in \mathcal{L}(\mathfrak{B})$, сильно сходится к оператору $B (\in \mathcal{L}(\mathfrak{B}))$, то будем писать $B_n \rightarrow B$. Пусть $\{\mathfrak{B}_n\}_{n=1}^\infty$ — система конечномерных подпространств в $\mathfrak{B}$, $\dim \mathfrak{B}_n = d_n < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, а P_n — некоторый проектор, проектирующий $\mathfrak{B}$ на $\mathfrak{B}_n$. Если $A_n \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_n)$, то обозначим $\tilde{A}_n = A_n P_n$.

Теорема 3. Пусть для последовательности операторов $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $A_n \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_n)$, существует оператор $A (\in \mathcal{L}(\mathfrak{B}))$ такой, что $A_n \rightarrow A$ и

$A_n \rightarrow A$. Пусть, кроме того, последовательность операторов $\{T_n\}_{n=1}^\infty$, $T_n \in \mathcal{L}(\mathfrak{B}_n)$, такова, что операторы T_n равномерно сходятся к вполне непрерывному оператору $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{B})$.

Тогда последовательности наборов собственных чисел операторов A_n и $B_n = A_n + T_n$, $n = 1, 2, \dots$, равномерно распределены на всяком компакте G , содержащем эти числа и обладающем связным дополнением.

Заметим, что условия теоремы 3, в частности, реализуются, если $A_n = P_n A P_n|_{\mathfrak{B}_n}$ и $B_n = P_n B P_n|_{\mathfrak{B}_n}$, где $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{B})$, оператор $A - B$ вполне непрерывен и $P_n \rightarrow I$, $P_n^* \rightarrow I$. (Через I (I) обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{B}$ (в $\mathfrak{B}^*$)). Отсюда вытекает следующее асимптотическое свойство определителей «усеченный» оператора $I + T$, где T вполне непрерывен.

Пусть $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{B})$ вполне непрерывен, оператор $I + T$ обратим и $P_n \rightarrow I$, $P_n^* \rightarrow I$. При каждом натуральном n можно выбрать такую ветвь функции $(z)^{1/d_n}$, $d_n = \dim P_n \mathfrak{B}$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (\det A_n)^{1/d_n} = 1$, где $A_n = P_n(I + T)P_n|_{\mathfrak{B}_n}$.

Теорема 4. Пусть выполнены все условия теоремы 3 и кроме того $P_n \rightarrow I$, $P_n^* \rightarrow I$. Пусть G — компакт, содержащий все собственные числа операторов A_n и B_n , $n = 1, 2, \dots$. Если дополнение к G состоит из конечного числа связных компонент G_j , $j = 1, 2, \dots, k$, в каждой из которых найдется хотя бы одна точка c_j такая, что $\sup_{n \geq 1} \|(A_n - c_j I)^{-1}\| < \infty$, $j = 1, 2, \dots, k$, то последовательности наборов собственных чисел операторов A_n и B_n , $n = 1, 2, \dots$, равномерно распределены на G .

Отметим, что из теоремы 3 и 4 и теоремы 1 вытекает формула, аналогичная (1) и характеризующая асимптотическое распределение спектров операторов $P_m(W_A + T)P_m|_{\mathfrak{H}_m}$, где T — вполне непрерывный оператор.

Замечание. Основным моментом в доказательстве теоремы настоящей работы является установление соотношений (1)–(3) для функций $F(\lambda)$ вида $F(\lambda) = \lambda^s$, $F(\lambda) = (\lambda - a)^{-s}$, $a \notin G$; $s = 1, 2, \dots$. Если соотношения (1)–(3) уже установлены для таких функций, то они без труда переносятся на алгебру функций $R(G)$ — замыкание (по равномерной норме) всех рациональных функций с полюсами вне G . Поэтому все результаты настоящей заметки справедливы для множеств G таких, что $R(G) = A(G)$. Различные достаточные условия на компакт G , носящие геометрический характер и обеспечивающие равенство $R(G) = A(G)$, установлены в известных работах С. Н. Мергеляна⁽⁸⁾, А. Г. Витушкина^{(9)*}, М. С. Мельникова⁽¹⁰⁾. Для простоты формулировок мы здесь пользовались простейшим из таких условий: дополнение к G состоит из конечного числа связных компонент.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность И. Ц. Гохбергу и А. С. Маркусу за полезные обсуждения изложенных результатов.

Кишиневский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
14 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ У. Грешадер, F. Сеге, Теплицевы формы и их приложения, М., 1961.
² С. Baxter, Illinois J. Math., 7, 97 (1963). ³ E. Reich, Math. Scand., 10, 2, 145 (1962). ⁴ N. L. Bowers jr., Toeplitz Forms Associated with Matrix Valued Functions, Doct. Diss., Univ. Minn., 1965. ⁵ I. I. Hirschmann jr., Am. J. Math., 88, 3, 577 (1966). ⁶ A. Devinatz, J. Math. Analysis and Appl., 14, 2, 499 (1966). ⁷ И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., 1971. ⁸ С. Н. Мергелян, УМН, 7, 2, 31 (1952). ⁹ А. Г. Витушкин, Матем. сборн., 71, 4, 515 (1966). ¹⁰ М. С. Мельников, Матем. сборн., 71, 4, 503 (1966). ¹¹ А. Г. Витушкин, ДАН, 171, № 6, 1255 (1966).

* В работе⁽¹¹⁾ найдены условия, являющиеся необходимыми и достаточными для совпадения алгебр $R(G)$ и $A(G)$.