

Ю. ЛИСИЦА

ПРОДОЛЖЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЙ И ФАКТОРИЗАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

(Представлено академиком П. С. Александровым 5 IV 1972)

Целью настоящей статьи является, во-первых, дать некоторые факторизационные теоремы, связанные с известной задачей продолжения отображений $f: A \rightarrow Y$ с замкнутых множеств A топологических пространств X из некоторых классов T_α в метризуемые пространства Y из соответствующих классов M_α , во-вторых, для некоторых из этих классов T_α охарактеризовать в классе всех метризуемых пространств те пространства Y , для которых верна факторизационная теорема, а также охарактеризовать один из классов T_α с помощью факторизационной теоремы.

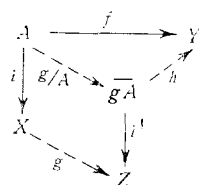
Известная теорема Куратовского — Дугунджи ^(1, 2), доказанная в классе метризуемых пространств, была обобщена на класс нормальных топологических пространств ⁽³⁾, стр. 630). При этом использовался результат одной довольно громоздкой теоремы Катетова ⁽⁴⁾, стр. 510). В действительности, эта теорема имеет много различных обобщений на самые разнообразные классы T хаусдорфовых пространств. Основными из них нам представляются следующие: T_4 — нормальные, T_5 — коллективно-нормальные, T_6 — нормальные M -пространства в смысле Мориты ⁽⁵⁾, стр. 379).

Эти обобщения можно получить с помощью следующей факторизационной теоремы типа Мардежича — Пасыпкова ⁽⁶⁾.

Теорема 1. Для любого пространства X из класса T_α , $\alpha = 4, 5, 6$, и любого отображения $f: A \rightarrow Y$, где A замкнуто в X , в данное метризуемое пространство Y из соответствующего класса M_α существуют отображения $g: X \rightarrow Z$ и $h: gA \rightarrow Y$, удовлетворяющие следующим условиям:

- Z метризуемо;
- $f = h|_{gA} \circ g|_A$;
- $w(Z) \leq w(Y)$;
- $\dim(Z \setminus gA) \leq r_X \dim(X \setminus A)$;
- $\dim gA \leq \dim A$.

Поясним сказанное. Классы T_α определены выше, классы M_α являются следующими: M_4 — метризуемые сепарабельные абсолютные G_δ , M_5 — метризуемые абсолютные G_δ , M_6 — любые метризуемые пространства. Условие б) означает коммутативность диаграммы



здесь через i, i' обозначены вложения. Через w мы обозначаем вес пространства, а через $\dim$ — размерность, определенную с помощью покрытий. Размерностная характеристика $r_X \dim$ определяется следующим образом:

для любого подмножества $H \subseteq X$

$$r_X \dim H = \sup_{F=\overline{F} \subseteq H} \dim F.$$

Если при некоторых условиях существует такая окрестность OA и отображения $g: OA \rightarrow Z$ и $h: \overline{gA} \rightarrow Y$, обладающие свойствами а) — д), скажем, что выполнена локальная факторизационная теорема.

З а м е ч а н и е 1. В теореме 1 нормальные пространства можно заменить на вполне регулярные, только вместо замкнутых множеств A рассматривать вполне замкнутые множества (⁷).

Сформулируем две ограничительные теоремы, из которых будет видно, что всякое серьезное увеличение класса T_α пространств X влечет заметное сокращение класса M_α метризуемых пространств Y , для которых справедлива факторизационная теорема.

Т е о р е м а 2. Если для метризуемого пространства Y справедлива локальная факторизационная теорема для всех пространств X из класса T_α , $\alpha = 4, 5$, то Y принадлежит соответствующему классу M_α .

Т е о р е м а 3. Если для фиксированного пространства X выполнена локальная факторизационная теорема для всех метризуемых пространств Y из класса M_α , то X принадлежит классу T_α .

Для доказательства факторизационной теоремы в случае $\alpha = 6$ понадобятся следующие теоремы.

Т е о р е м а 4. Выпуклые подмножества банахова пространства являются абсолютными экстензорами в классе нормальных M -пространств.

Т е о р е м а 5. Для любого паракомпактного M -пространства X , для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ в метризуемое пространство Y существует такое метризуемое пространство Z , такое отображение $h: Z \rightarrow Y$ и такое совершенное отображение $g: X \rightarrow Z$, что $f = h \circ g$.

З а м е ч а н и е 2. Известно, что класс паракомпактных M -пространств совпадает с классом паракомпактных перистых пространств (⁸).

Теорема 4 вытекает из теоремы 5 и паракомпактификации M -пространств в силу следующего: для любого вполне регулярного пространства X существует пополнение μX ((⁹), стр. 511), обладающее следующими свойствами:

1) $\overline{X} = \mu X$;

2) для любого отображения $f: X \rightarrow Y$ в метризуемое пространство Y существует продолжение $\text{ext } f: \mu X \rightarrow Y$. В случае M -пространств μX является паракомпактным пространством ((⁹), стр. 512, теорема 5).

Из теорем 1 и 2 можно получить много различных следствий, связанных с задачей продолжения отображений. Самое интересное из них нам представляется следующее обобщение теоремы Куратовского — Дугунджи:

Т е о р е м а 6. Чтобы для всякого нормального M -пространства X всякое отображение $f: A \rightarrow Y$ в данное метризуемое пространство Y , где A замкнуто в X , а $r_X \dim (X \setminus A) \leq n + 1$, можно было продолжить в отображение $F: X \rightarrow Y$ (соответственно $F: OA \rightarrow Y$), необходимо и достаточно, чтобы Y было связным и локально-связным (соответственно локально-связным) в размерности n .

В заключение выражаю искреннюю благодарность и признательность проф. Ю. М. Смирнову за помощь и поддержку.

Университет Дружбы народов
им. П. Пумумбы
Москва

Поступило
29 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ К. Куратовский, Топология, 2, М., 1969. ² J. Dugundji, Comp. Math., 13, 229 (1958). ³ V. Moncusso, Canad. J. Math., 19, 629 (1967). ⁴ M. Katětov, Czechoslov. Math. J., 6 (81), 485 (1956). ⁵ K. Morita, Math. Ann., 154, 365 (1964). ⁶ Б. А. Пасынков, Fund. Math., 60, 285 (1967). ⁷ Ю. М. Смирнов, Матем. сборн., 38 (80), 271 (1956). ⁸ А. В. Архангельский, Матем. сборн., 67, 55 (1965). ⁹ K. Morita, Proc. Japan Acad., 60, 511 (1970).