

УДК 517.512

МАТЕМАТИКА

Академик АН АзербССР И. И. ИБРАГИМОВ, В. Н. ТРУКАЧЕВ

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ В КЛАССЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

Пусть B_σ означает класс целых функций конечной степени $\leq \sigma$, удовлетворяющих условию $\sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)| < +\infty$, а $W_\sigma^{(p)}$, $p \geq 1$, — класс целых функций из B_σ , для которых

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

Обозначим через $W_\sigma^{+(p)}$ множество функций $f(z) \in W_\sigma^{(p)}$, неотрицательных на вещественной оси, а через $\tilde{B}_\sigma$ — множество функций из B_σ , монотонных на $(R) = (-\infty, \infty)$.

Наконец, обозначим через $\tilde{B}$ совокупность функций $f(z) \in \tilde{B}_\sigma$, подчиненных условиям

$$f'(a_v) = \beta_v, \quad v = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где $a_1, \dots, a_n$; $\beta_1, \dots, \beta_n$ — заданные вещественные числа и $\beta_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$.

В настоящей работе мы находим в классе $\tilde{B}$ так называемую экстремальную функцию $f_0(z)$, удовлетворяющую соотношению

$$\|f_0\|_C = \inf_{f \in \tilde{B}_\sigma^{(n)}} \|f\|_C. \quad (2)$$

Существование хотя бы одной экстремальной функции доказывается без труда.

Заметим, что функция $f_0(z)$ удовлетворяет условию

$$f_0(+\infty) = -f_0(-\infty). \quad (3)$$

В самом деле, если выполняется одно из неравенств $|f_0(+\infty)| \geq |f_0(-\infty)|$, то функция $\varphi(z) = f_0(z) - 1/2[f_0(+\infty) + f_0(-\infty)]$ удовлетворяет условиям (1) и $\|\varphi\|_C < \|f_0\|_C$, что противоречит (2). Следовательно, $|f_0(+\infty)| = |f_0(-\infty)|$, откуда получаем (3). В силу (3) имеем

$$\|f_0\|_C = 1/2[f_0(+\infty) - f_0(-\infty)]. \quad (4)$$

Полагая $f_0(x) = C + \int_0^x f'(\xi) d\xi$ и учитывая (4), находим

$$\|f_0\|_C = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f'(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Так как $f'(z) \in W_\sigma^{(1)}$, то на (R) ее можно представить в виде (см. (1))

$$f'(x) = |\psi_{\sigma/2}(x)|^2, \quad (6)$$

где $\psi_{\sigma/2}(z) \in W_{\sigma/2}^{(2)}$.

Минимизируя (5) при условиях

$$\psi_{\sigma/2}(\alpha_v) = \sqrt{\beta_v} \exp(i\theta_v), \quad 0 \leq \theta_v < 2\pi, \quad v = 1, \dots, n,$$

получаем (см. (2))

$$\|f_0\|_C = \frac{\pi}{\sigma\Delta} \sum_{v=1}^n \sqrt{\beta_v} (\Delta'_v \cos \theta_v + \Delta''_v \sin \theta_v), \quad (7)$$

где

$$\Delta = \text{Det} \left(\frac{\sin^{1/2} \sigma (\alpha_k - \alpha_j)}{\sin^{1/2} \sigma (\alpha_k - \alpha_j)} \right)_{k,j=1}^n,$$

а Δ'_v и Δ''_v получаются из Δ заменой столбца с номером v соответственно столбцом $\sqrt{\beta_1} \cos \theta_1, \dots, \sqrt{\beta_n} \cos \theta_n$ или $\sqrt{\beta_1} \sin \theta_1, \dots, \sqrt{\beta_n} \sin \theta_n$.

Заметим, что числа $\theta_1, \dots, \theta_n$ следует выбирать так, чтобы правая часть (7) принимала наименьшее значение.

Экстремальная функция $f_0(x)$ имеет вид

$$f_0(x) = C + \int_0^x \left| \sum_{v=1}^n \frac{\Delta'_v + i\Delta''_v}{\Delta} \frac{\sin^{1/2} \sigma (t - \alpha_v)}{\sin^{1/2} \sigma (t - \alpha_v)} \right|^2 dt,$$

где

$$C = \frac{1}{2} \int_0^\infty [f'_0(-x) - f'_0(x)] dx.$$

Рассмотрим некоторые задачи на применение формулы (7).

Задача 1 (С. Н. Бернштейн). Среди всех функций $f(z) \in \tilde{B}_\sigma$, удовлетворяющих условию $f'(x_0) = \beta$, найти ту, которая наименее уклоняется от нуля на (R) в смысле Чебышева.

Соотношение (7) в этом случае имеет вид

$$\|f_0\|_C = \frac{\pi}{\sigma} \beta, \quad (8)$$

а экстремальной является функция

$$f_0(x) = \int_0^x \left[\frac{\sin^{1/2} \sigma (t - x_0)}{\sin^{1/2} \sigma (t - x_0)} \right]^2 dt.$$

Задача 2. Пусть $n = 2$, $\alpha_2 > \alpha_1$. Из равенства (7) получаем выражение для нормы экстремальной функции

$$\|f_0\|_C = \frac{\pi}{\sigma} \frac{\beta_1 - 2M \sqrt{\beta_1 \beta_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) + \beta_2}{1 - M^2}, \quad (9)$$

где

$$M = \frac{\sin^{1/2} \sigma (\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin^{1/2} \sigma (\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

Нетрудно заметить, что минимум в (9) достигается при $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \arccos(\text{sign} \sin^{1/2} \sigma (\alpha_2 - \alpha_1))$.

Таким образом, окончательно имеем

$$\|f_0\|_C = \frac{\pi}{\sigma} \frac{\beta_1 - 2|M| \sqrt{\beta_1 \beta_2} + \beta_2}{1 - M^2}. \quad (10)$$

Выражение для $f_0(x)$ не приводим из-за его громоздкости.

Задача 3. Рассмотрим совокупность функций $f(z) \in \tilde{B}_\sigma$, подчиненных условию $f'(\alpha_2) - f'(\alpha_1) = L$, где $\alpha_2 > \alpha_1$, $L > 0$. Экстремальную функ-

цию этой задачи обозначим через $f^*(z)$. Минимизируя (10) при условии $\beta_2 - \beta_1 = L$, получим

$$\|f^*\|_C = \frac{\pi}{\sigma} \frac{L}{\sqrt{1-M^2}}. \quad (11)$$

Из (11) вытекает неравенство для функций класса $\tilde{B}_\sigma$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\sigma}{\pi} \sqrt{1 - \left[\frac{\sin \frac{1}{2}\sigma(x_1 - x_2)}{\frac{1}{2}\sigma(x_1 - x_2)} \right]^2} \|f\|_C, \quad (12)$$

верное при любых $x_1, x_2 \in (R)$.

Полагая $x_2 = x$ и деля обе части (12) на $x_1 - x$, предельным переходом при $x_1 \rightarrow x$ получаем

$$|f'(x)| \leq \frac{\sigma^2}{2\sqrt{3}\pi} \|f\|_C. \quad (13)$$

Отметим, что равенство в (13) достигается для функций вида

$$f(x) = C \int_0^x \left(\frac{\sin \frac{1}{2}\sigma t}{\frac{1}{2}\sigma t} - \frac{2\sqrt{3}}{\sigma} \frac{d}{dt} \left[\frac{\sin \frac{1}{2}\sigma t}{\frac{1}{2}\sigma t} \right] \right)^2 dt,$$

где C — вещественная постоянная.

Неравенство для третьей производной получено Б. А. Рымаренко в работе (3).

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
28 VI 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Ибрагимов, Экстремальные свойства целых функций конечной степени, Баку, 1962. ² Я. И. Хургин, В. П. Яковлев, Финитные функции в физике и технике, «Наука», 1971. ³ Б. А. Рымаренко, ДАН, 155, № 1 (1964). ⁴ С. Н. Бернштейн, Собр. соч., 2, (85), Изд. АН СССР, 1954.