Академик Б. Б. КАДОМЦЕВ, В. И. ПЕТВИАШВИЛИ

О ЗВУКОВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

При возбуждении сжимаемого газа или плазмы случайными потенциальными силами должна развиваться звуковая турбулентность — совокупность звуковых волн конечной амплитуды. Поскольку в отсутствие дисперсии звуковые волны конечной амплитуды «опрокидываются» и образуют ударные волны, то кажется естественным, что звуковая турбулентность будет порождать ударные волны.

Однако это соображение далеко не очевидно. В работе (1), например, посвященной исследованию спектра звуковой турбулентности, приводятся, казалось бы, достаточно убедительные аргументы, что в коротковолновой области спектра должен получаться спектр $v_k^2 \propto k^{-3/2}$ (при наличии ударных волн спектр должен бы быть более крутым, $v_k^2 \propto k^{-2}$). Этот результат получается как из соображений эстафетной передачи энергии по спектру, по аналогии с аргументацией Колмогорова для обычной турбулентности, так и по теории слабой турбулентности (строго говоря, не применимой в данной ситуации).

Но следует учесть, что в работе (1) вопрос о спектре звуковой турбулентности рассматривался с помощью уравнений, записанных в Фурье-представлении (т. е. в пространстве волновых чисел). При этом очень трудно проследить за отдельными «гребнями» волн и сделать суждение об их опрокидывании. В настоящем сообщении мы покажем, что уравнения в обычном пространстве приводят к выводу об опрокидывании и образовании ударных волн, так что спектр должен быть более крутым $v_k^2 \propto k^{-2}$. Соответственно мы обсудим, как следует модифицировать идеи Колмогорова — Обухова о передаче энергии по спектру на случай образования разрывов (например, ударных волн).

Для простоты допустим, что звук изотермический (теплопроводность очень велика), а вязкость исчезающе мала. Тогда движение газа можно описать уравнениями Эйлера и непрерывности

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + c^2 \nabla \ln \rho = \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \rho + \mathbf{v} \nabla \ln \rho + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{v}$ — скорость, c — изотермическая скорость звука, ρ — плотность, $\mathbf{g}$ — ускорение, создаваемое внешней случайной силой $\mathbf{F} = \mathbf{g}\rho$.

Будем считать, что движение потенциально, т. е. $\mathbf{g} = -\nabla\psi$, $\mathbf{v} = \nabla\mu$. Тогда уравнение (1) можно один раз проинтегрировать, после чего, исключая $\ln \rho$, получаем уравнение для μ

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mu = - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \mu)^2 - \frac{1}{2} \nabla \mu \nabla (\nabla \mu)^2 + \frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \mu \nabla \psi. \quad (3)$$

Это уравнение описывает эволюцию звуковых волн конечной амплитуды, возбуждаемых внешними силами, которые мы будем считать случайными. При небольшой амплитуде заметно взаимодействуют лишь волны, распространяющиеся почти в одном направлении (1). Поэтому можно выбрать некоторую фиксированную ось z и рассмотреть лишь волны, распространяющиеся почти вдоль оси z , так что $\partial \mu / \partial t \approx -c \partial \mu / \partial z$. Точнее, положим

$\mu = \mu(t, \mathbf{r}_\perp, z - ct)$, где зависимость от первых двух аргументов можно считать медленной. Пренебрегая малыми членами, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial \mu}{\partial z} = -\frac{c}{2} \Delta_\perp \mu - \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \mu}{\partial z^2} + \frac{1}{2c} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial z} + c \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] \psi. \quad (4)$$

В функции ψ мы также перешли к новым переменным $t, z - ct$ и, как видно из (4), при малой амплитуде членами $\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z}$ можно пренебречь.

Вводя новые переменные $u = \partial \mu / \partial z$, $\varphi = -1/2c \Delta_\perp \mu$, представим (4) в виде системы двух уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u + \frac{u^2}{2c} \right) \frac{\partial u}{\partial z} = \varphi + \Phi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{c}{2} \Delta_\perp u, \quad (6)$$

где $\Phi = 1/2 \partial^2 \psi / \partial z^2$ — случайная сила.

Будем считать, что сила Φ возбуждает колебания в длинноволновой части спектра с некоторым характерным волновым числом K_0 . Что касается временной зависимости Φ , то, поскольку в рассматриваемой движущейся со скоростью c системе координат нас интересует медленная эволюция волн, Φ можно считать δ -коррелированной во времени.

Допустим, что внешняя сила начала действовать с некоторого момента времени, скажем, $t = 0$. Тогда вначале амплитуда колебаний будет мала, и в (5), (6) можно пренебречь нелинейными членами. В линейном приближении, как видно из (5), (6), решение можно представить себе как суперпозицию плоских волн с частотой $\omega = ck_\perp^2 / 2k_z$, т. е. частота тем больше, чем больше угол $\alpha = k_\perp / k_z$, под которым распространяется волна по отношению к оси z . При δ -коррелированной по времени силе Φ амплитуды всех волн будут нарастать как $\sqrt{t}$, так что, начиная с некоторого времени, в игру вступают нелинейные члены в левой части уравнения (5). Рассмотрим сначала кубичный член. Величину $u^2 / (2c)$ можно представить как $\langle u^2 \rangle / (2c) + (u^2 - \langle u^2 \rangle) / (2c)$, где усреднение производится по времени и пространству. Среднее значение $\langle u^2 \rangle / (2c)$ определяется всеми волнами, оно приводит просто к некоторому увеличению частоты, т. е. как бы немного увеличивает скорость звука. Этот эффект несуществен. Что касается величины $(u^2 - \langle u^2 \rangle) / (2c)$, то она мала по сравнению с u и может быть опущена. Таким образом, достаточно учесть лишь квадратичный член.

Рассмотрим теперь группы волн, распространяющихся внутри некоторого узкого конуса направлений с углом α . Эти волны можно объединить в один волновой пакет с амплитудой $\tilde{u}$. Если $\alpha^2 < \tilde{u} / c$, то член с φ в (5), приводящий к дисперсии, играет меньшую роль, чем нелинейный, и в пренебрежении φ мы получаем уравнение для простой волны

$$\partial \tilde{u} / \partial t + \tilde{u} \partial \tilde{u} / \partial z = 0.$$

Это уравнение приводит к опрокидыванию волны, а с учетом малой вязкости — к образованию пилообразных волн с ударными разрывами. Другими словами, уравнения (5), (6) показывают, что волны имеют тенденцию объединяться в совокупность пилообразных волн с углом $\sim (\tilde{u} / c)^{1/2}$ между соседними волнами. Нетрудно видеть, что в уравнениях (5), (6) нет механизмов, которые смогли бы воспрепятствовать опрокидыванию и образованию разрывов. В самом деле, если начинает образовываться ударная волна, то $\partial \tilde{u} / \partial z \rightarrow \infty$. При этом вблизи точки разрыва $\partial u / \partial t$ и φ также могут неограниченно возрастать, но это означает лишь, что образуется косая ударная волна, распространяющаяся под углом к оси z . Что касается нелинейного члена в (5), то при наличии других волн, кроме рассматриваемой, он никаких существенно новых элементов не вносит — рассматриваемая вол-

на будет лишь несколько «дрожать» на фоне косых быстро распространяющихся волн.

Таким образом, мы приходим к заключению, что звуковая турбулентность представляет собой набор пилообразных волн. Каждая из таких волн затухает во времени, так что стационарное в среднем состояние существует только при подпитке турбулентности внешними силами Φ . Именно величина Φ и определяет уровень звуковых шумов. Пилообразные волны взаимодействуют между собой, а именно, близкие по направлению волны имеют тенденцию к слиянию. Этот процесс и определяет средний угол α между соседними по направлению волнами $\alpha \approx (\bar{u}/c)^{1/2}$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, почему же к уравнениям (5), (6), согласно которым далекие гармоники, казалось бы, слабо взаимодействуют между собой, нельзя применять соображения об эстафетной передаче энергии по спектру. Дело в том, что в пилообразной волне все гармоники скоррелированы по фазам и все вместе затухают за счет поглощения энергии на ударном фронте. Если пренебречь корреляцией фаз, то приближенно можно было бы говорить о передаче энергии по спектру, но при этом для каждой гармоники нужно было бы учесть эффект прямого поглощения энергии за счет переноса данной гармоники к ударному фронту. Если считать, что перенос данной гармоники k к ударной волне осуществляется всеми предыдущими гармониками, причем основной вклад в этот перенос вносят высокие гармоники (по меньшие k), то из соображений размерности перенос энергии по спектру можно было бы описать феноменологическим уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} v_k^2 + \frac{\partial}{\partial k} \Gamma_k = -\alpha \Gamma_k / k; \quad (7)$$

здесь Γ_k — поток энергии по спектру, из соображений размерности равный $A v_k^4 k^3 / c$ ($A = \text{const}$) ⁽¹⁾, а член в правой части учитывает поглощение энергии данной гармоники на ударных волнах. В обычной турбулентности в стационарном состоянии $\Gamma_k = \text{const}$ и диссипация происходит только при очень больших k . В данном же случае, согласно (7), $\Gamma_k = \text{const} / k^\alpha$, т. е. по мере возрастания k поток энергии в области больших k убывает. Так как при наличии ударных волн $v_k^2 \propto k^{-2}$, то $\alpha = 1$.

Эффект прямого затухания энергии гармоник за счет ее переноса в область разрыва, по-видимому, может иметь место и в других случаях, когда в волновом движении образуются особенности. В частности, именно с этой точки зрения можно интерпретировать различие между спектром гравитационных волн на воде ω^{-4} , полученным в теории слабой турбулентности ⁽²⁾, и спектром Филлипса ω^{-5} ⁽³⁾, исходившего из представлений об образовании «барашков», т. е. разрывов производной от $\zeta(\mathbf{r})$, где ζ — возвышения над стационарным уровнем. В зависимости от того, на какой доле от общего числа волн образуются барашки, могут, по-видимому, устанавливаться и промежуточные между ω^{-4} и ω^{-5} спектры.

Авторы выражают благодарность акад. Р. З. Сагдееву за обсуждение работы.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова
Москва

Поступило
8 IX 1972

¹ В. Е. Захаров, Р. З. Сагдеев, ДАН, 192, № 2, 297 (1970). ² В. Е. Захаров, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 4, 35 (1965). ³ С. М. Филлипс, в сборн. Ветровые волны, ИЛ, 1962, стр. 219.