

УДК 539.374.1

МЕХАНИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

П. П. МОСОЛОВ

**СВЯЗЬ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ И ПЛОСКИХ ЗАДАЧ
В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД**

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 29 XII 1971)

1. Пространственные движения сплошных сред обычно являются трехмерными. Однако в ряде задач, когда пределы изменения одного из переменных $(x_3, |x_3| \leq N)$ намного превосходят пределы изменения других переменных $(x_1, x_2; |x_i| \leq L_i; L_i \ll N; i = 1, 2)$, внешние силовые поля слабо зависят от переменного x_3 и кинематические ограничения, накладываемые на движение, также слабо зависят от переменного x_3 , мы идеализируем процесс, предполагая, что движение геометрически тождественно в плоскостях, перпендикулярных к оси x_3 , т. е. переходим к плоским задачам. Обычно этот переход носит интуитивный характер, что в некоторых задачах приводит к физически некорректному движению (парадокс Стокса⁽¹⁾).

В настоящей работе мы даем подход к математическому анализу таких переходов, причем удастся установить для широкого класса нелинейных сред не только сам факт перехода пространственного движения в плоское, но и найти оценку в соответствующей метрике различия между пространственными и плоскими движениями.

Нам кажется, что заслуживает внимания метод исследования указанных задач. Он оказывается полезным и при изучении различных других асимптотических задач в механике сплошных сред.

2. Многие задачи механики сплошных сред приводят к задаче об экстремуме функционала^(2, 3)

$$J(u) = \int_{\omega} \varphi(x, e_{ij}) d\omega - F(u); \quad (1)$$

здесь $e_{ij} = 1/2(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$, ω — ограниченная область в R^3 , занятая средой, φ — потенциал среды, $F(u)$ — функционал, связанный с внешними силовыми полями.

Относительно потенциала φ сделаем следующие предположения:

I) $\varphi(x, e_{ij}) \geq 0$ и $\varphi(x, e_{ij}) = 0$ лишь при $e_{ij} = 0$;

II) $\varphi(x, e_{ij}) = \varphi(x, I_1, I_2, I_3)$, где $I_1 = \sum_{i=1}^3 e_{ii}$, $I_2 = \left\{ \sum_{i,j=1}^3 e_{ij}^2 \right\}^{1/2}$, $(I_3)^3 = \det(e_{ij})$;

III) существуют числа $p, p \geq 1$; k, k_1, k_2 такие, что $0 < k_1 I_2^p \leq \varphi(x, e_{ij}) \leq k_2 I_2^p$ при $I_2 \geq k > 0$;

IV) $\varphi(x, e_{ij})$ — выпуклая функция e_{ij} ;

V) $\varphi(x_1, x_2, x_3, e_{ij}) = \varphi(x_1, x_2, e_{ij})$.

В силу выпуклости потенциала φ и линейности F задача об экстремуме функционала (1) эквивалентна задаче о его минимуме.

Рассмотрим в R^3 цилиндр π с осью, параллельной x_3 , и поперечным сечением D . Пусть граница D — кусочно гладкая. Рассмотрим в π линейное пространство L гладких полей, обращающихся в нуль на некотором куске границы $\partial\pi$, имеющем вид $\gamma \times (-\infty < x_3 < \infty)$, где γ — объединение

конечного числа простых дуг, расположенных на ∂D . Пусть $\omega_N = \pi \cap \{x: |x_3| \leq N\}$. Обозначим через $L_{p^1}(\omega_N)$ замыкание сужения L на ω_N в норме

$$\|u\|_{L_{p^1}(\omega_N)} = \left\{ \frac{1}{2N} \int_{\omega_N} I_1^p d\omega \right\}^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Структура пространств $L_{p^1}(\omega_N)$ изучена в (4), и здесь мы существенно используем результаты этой работы. Функционал (1) перепишем в виде

$$J_N(u) = \frac{1}{2N} \int_{\omega_N} \varphi(x, e_{ij}) d\omega - F_N(u). \quad (2)$$

3. Изучение связи между пространственными и плоскими задачами начнем с задачи о равновесии упругой среды. Рассмотрим плоские поля $v(x_1, x_2) = (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2), 0)$, определенные в области D , и линейный функционал $G(v)$ на них. Остановимся сначала на функционалах $F_N(u)$ вида

$$F_N(u) = \left(\int_{-N}^N f_N\left(\frac{x_3}{N}\right) dx_3 \right)^{-1} \cdot G\left(\int_{-N}^N u_1 f_N dx_3, \int_{-N}^N u_2 f_N dx_3 \right). \quad (3)$$

Функция f_N в (3) будет определена ниже.

Сделаем в функционале (2) замену переменных, полагая $x_3 = \xi N$, $u_3 = Nu_3'$. Тогда функционал (2) примет вид

$$\begin{aligned} J_N(u) = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_D \varphi\left(x_1, x_2, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \frac{\partial u_3'}{\partial \xi}, \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + N \frac{\partial u_3'}{\partial x_1} \right), \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} + N \frac{\partial u_3'}{\partial x_2} \right), \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \right) d\xi d\tau - \\ & - \left(\int_{-1}^1 f_N(\xi) d\xi \right)^{-1} \cdot G\left(\int_{-1}^1 u_1 f_N d\xi, \int_{-1}^1 u_2 f_N d\xi \right). \end{aligned} \quad (4)$$

В (4) указан порядок аргументов у φ . Этот порядок сохраняется в дальнейшем. Штрих у u_3' ниже мы будем опускать.

Обозначим через $L_{p^1}(D)$ подпространство $L_{p^1}(\omega_N)$, состоящее из плоских полей. Функционал (2) на $L_{p^1}(D)$ имеет вид

$$J(v) = \int_D \varphi\left(x_1, x_2, \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \right) d\tau - G(v).$$

Очевидно, что

$$\inf_{u \in L_{p^1}(\omega_N)} J_N \leq \inf_{v \in L_{p^1}(D)} J = J^*. \quad (5)$$

Основная теорема (теорема 1) настоящей работы посвящена оценке снизу нижней грани J_N на $L_{p^1}(\omega_N)$ через J^* . В дальнейшем предполагается непрерывность $G(v)$ в $L_{p^1}(D)$. Выберем функцию $f_N(\xi)$. Пусть $\omega_h(p)$ — неотрицательная, четная, бесконечно дифференцируемая функция такая, что $\omega_h(p) = 0$ при $|p| \geq h$. Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega_h(p) dp = 1, \quad \omega_h(p) \leq \frac{M_1}{h}, \quad |\omega_h'(p)| \leq \frac{M_2}{h^2}, \quad |\omega_h''(p)| \leq \frac{M_3}{h^3}.$$

Положим $h(N) = N^{-p/(p^2+2p-1)+\delta}$, где $0 < \delta < p/(p^2+2p-1)$. Тогда

$$f_N(\xi) = \int_{-1+h(N)}^{1-h(N)} \omega_{h(N)}(\xi - p) dp, \quad 2\gamma_N = \int_{-1}^1 f_N(\xi) d\xi.$$

По каждому полю u из $L_p^1(\omega_N)$ можно построить v^N из $L_p^1(D)$:

$$v_1^N = \frac{1}{2\gamma_N} \int_{-1}^1 u_1 f_N d\xi, \quad v_2^N = \frac{1}{2\gamma_N} \int_{-1}^1 u_2 f_N d\xi. \quad (6)$$

Имеет место следующая основная

Лемма 1. Для полей u , у которых $\|u\|_{L_p(\omega_N)} \leq C$, существует число C_δ такое, что

$$J_N(u) \geq \gamma_N J(v^N) - C_\delta N^{-p/(p^2+2p-1)+\delta}. \quad (7)$$

Доказательство леммы 1 основано на коммутации усреднения с выпуклой функцией.

Из леммы 1 и неравенства (5) следует

Теорема 1.

$$0 \leq J^* - \inf_{u \in L_p^1(\omega_N)} J_N(u) \leq C_\delta N^{-p/(p^2+2p-1)+\delta}. \quad (8)$$

Теорема 1 доказана для специального вида силовых полей (см. (3)).

Теорема 2. Пусть

$$I_N(u) = \frac{1}{2N} \int_{-N}^N \int_D \varphi dx_3 d\tau - F_N(u).$$

Если существует непрерывный в $L_p^1(D)$ функционал $G(v)$, для которого

$$\left| F_N(u) - \left(\int_{-N}^N f_N dx_3 \right)^{-1} \cdot G \left(\int_{-N}^N u_1 f_N dx_3, \int_{-N}^N u_2 f_N dx_3 \right) \right| \leq \varepsilon(N) \|u\|_{L_p^1(\omega_N)}, \quad (9)$$

где $\varepsilon(N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, то

$$\left| \inf_{u \in L_p^1(\omega_N)} I_N(u) - J^* \right| \leq C_\delta N^{-p/(p^2+2p-1)+\delta} + R\varepsilon(N).$$

Теорема 2 показывает, как могут зависеть от x_3 внешние силовые поля, чтобы имел место предельный переход от пространственной задачи к плоской. Иногда можно сделать такой предельный переход и в задачах, где кинетические ограничения зависят от x_3 . В связи с этим рассмотрим пространства $P_p^1(\omega_N)$, $Q_p^1(\omega_N)$. Обозначим через $W_p^1(\omega_N)$ пространство векторных полей u с нормой

$$\|u\|_{W_p^1(\omega_N)} = \left\{ \frac{1}{2N} \int_{\omega_N} I_2^p d\omega \right\}^{1/p} + \left\{ \frac{1}{2N} \int_{\omega_N} |u|^p d\omega \right\}^{1/p}.$$

Пространство $P_p^1(\omega_N)$ является подпространством $W_p^1(\omega_N)$, сужение которого на область $\omega_N' = \omega_N \cap \{|x_3| \leq N - \alpha\}$ совпадает с $L_p^1(\omega_N')$ (α — некоторое фиксированное положительное число). Таким образом, поля из $P_p^1(\omega_N)$ свободны от кинематических ограничений при $N \geq |x_3| \geq N - \alpha$. Пространство $Q_p^1(\omega_N)$ — подпространство $L_p^1(\omega_N)$ с той же нормой, поля в котором удовлетворяют условию $\int_D |u(x_1, x_2, \pm N)| d\tau = 0$. Очевидно, что $P_p^1(\omega_N) \supset L_p^1(\omega_N) \supset Q_p^1(\omega_N)$. В этих пространствах можно получить теоремы, аналогичные теоремам 1, 2.

4. Основное затруднение при перенесении результатов п. 3 на случай несжимаемых жидкостей состоит в отыскании аналога леммы 1. Саму лемму 1 здесь использовать нельзя потому, что поля u , удовлетворяющие условию несжимаемости, переходят в поля v^N (построенные по формулам

(6)), не удовлетворяющие этому условию. Именно,

$$\partial v_1^N / \partial x_1 + \partial v_2^N / \partial x_2 + S^N(x_1, x_2) = 0.$$

Для S^N можно получить оценку, если $\|u\|_{L^1_p(\omega_N)} \leq C$.

$$\|S^N\|_{L^p(D)} + \|\text{grad } S^N\|_{L^p(D)} \leq C_\delta / N^{p/(p^2+2p-1)+\delta(2p-1)/p^2}.$$

Здесь δ то же самое, которое входит в $h(N)$.

Далее можно построить w^N такое, что $v^N - w^N$ — допустимое поле, т. е. $v^N - w^N$ удовлетворяет кинематическим ограничениям и $\text{div}(v^N - w^N) = 0$. Кроме того,

$$\|w^N\|_{L^1_p(D)} \leq C_\delta^1 / N^{p/(p^2+2p-1)+\delta(2p-1)/p^2}.$$

Имеет место лемма, аналогичная лемме 1:

Лемма 2. Для полей u , y которых $\|u\|_{L^1_p(\omega_N)} \leq C$, $\text{div } u = 0$, существует C_δ такое, что

$$J_N(u) \geq \gamma_N J(v^N - w^N) - C_\delta^2 N^{-p/(p^2+2p-1)+\delta}.$$

Исходя из леммы 2, все результаты п. 3 легко перенести на случай жидкости.

5. Лемма 2 дает возможность оценить различие истинных кинематических коэффициентов пространственной и плоской задач. Именно, обозначим через $k(L)$, $k(P)$, $k(Q)$ истинные кинематические коэффициенты для функционала (4) на пространствах $L^1_1(\omega_N)$, $P^1_1(\omega_N)$, $Q^1_1(\omega_N)$ соответственно. Очевидно, что эти коэффициенты зависят от N . Обозначим через k истинный кинематический коэффициент плоской задачи.

Теорема 3. Для всякого δ , $0 < \delta < 1/2$, существует C_δ такое, что

$$0 \leq k - k(L) \leq C_\delta N^{-1/2+\delta}.$$

Аналогичные утверждения можно получить относительно $k(P)$ и $k(Q)$.

Теорема 3 получена для случая, когда F_N имеют вид (3). Сделав относительно F_N предположение (9), можно найти асимптотическое поведение $k(L)$, $k(P)$, $k(Q)$, соответствующих F_N . В функционалах вида (3) существенную роль играет функция f_N , которая приводит к исчезанию плотности внешних сил при x_3 , приближающемся к N или $-N$. Нетрудно видеть, что если число p , связанное с потенциалом, больше единицы, то это предположение относительно f_N несущественно.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. Жермен, *Механика сплошных сред*, М., 1965. ² Ю. Н. Работнов, *Лекции по теории упругости*, М., (ротапринт), 1967. ³ Л. И. Седов, *Механика сплошной среды*, 1, «Наука», 1970. ⁴ П. П. Мосолов, В. П. Мясников, *ДАН*, 201, № 1, 36 (1971).