Доклады Академии наук СССР
1972. Том 206, № 1

УДК 519.214 **МАТЕМАТИКА**

С. В. НАГАЕВ

БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

(Представлено академиком Ю. В. Линником 12 I 1972)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$ и $M\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = 1$.

Предположим, что при $x \to \infty$

$$1 - F(x) = e^{\chi(x)}(1 + o(1)), \tag{1}$$

где $\chi(x)$ — невозрастающая функция, удовлетворяющая следующим условиям:

I) $\lim\limits_{x\to\infty} \chi'(x)x/\ln x = -\infty$;

II) $\exists\, 0 < \alpha < 1$ такое, что $\alpha\chi(x)/x \leqslant \chi'(x)$;

III) $l\chi''(x) \leqslant -\chi'(x)/x \leqslant L\chi''(x)$;

IV) $0 \leqslant -\chi'''(x) \leqslant L_1\chi''(x)/x$,

где l, L, L_1 — некоторые положительные постоянные.

Допустим, что

$$M|\xi_1|^{N(\alpha)} < \infty, \quad N(\alpha) = \left[\frac{3-2\alpha}{1-\alpha}\right].$$

Положим

$$K(u) = \sum_{k=1}^{N(\alpha)} \chi_k u^k,$$

где χ_k — семиинварианты распределения $F(x)$.

Обозначим через $\lambda_\alpha(z)$ отрезок ряда Крамера, содержащий $N(\alpha) - 3$ первых членов. Положим

$$P(x) = P\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i > x\right),$$

$$P_1(x) = n(1 - \chi''((1-\beta)x)n)^{-1/2}(1 - F((1-\beta)x))\exp\left\{-\frac{(\beta x)^2}{2n} + \right.$$
$$\left. + \frac{(\beta x)^3}{n^2}\lambda_\alpha\left(\frac{\beta x}{n}\right)\right\},$$

где β — наименьший из положительных корней уравнения

$$K'(-\chi'((1-\beta)x) = \frac{\beta x}{n};$$

$$P_2(x) = \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\exp\left(\frac{x^3}{n^2}\lambda_\alpha\left(\frac{x}{n}\right)\right)\right).$$

Теорема 1. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} xn^{-1/(2-\alpha)} = \infty$, *то*

$$P(x) = P_1(x)(1 + o(1)) \tag{2}$$

Если $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, xn^{-1/(2-\alpha)} < \infty$ *и* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\chi''((1-\beta)x) < 1$, *то*

$$P(x) = (P_1(x) + P_2(x))(1 + o(1)). \tag{3}$$

Если $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\chi''((1-\beta)x) \geqslant 1$, *то*

$$P(x) = P_2(x)(1 + o(1)). \tag{4}$$

Заметим, что если $n\chi''((1-\beta)x) \to 0$, то

$$P(x) = n(1 - F(x))(1 + o(1)).$$

Этот результат при более жестких, нежели условия I) — IV), ограничениях на $\chi(x)$, был получен в ([1]). В работе ([2]) выведены асимптотические представления типа (2) — (4) в случае, когда $\chi(x) = x^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$.

Заметим, что из условия I) следует, что $|\chi(x)|$ возрастает быстрее, чем $\ln^2 x$. Можно заменить условие (I) более слабым условием

I') $\lim\limits_{x\to\infty} \chi'(x)x = -\infty$,

из которого вытекает лишь, что $-\chi(x)/\ln x \to \infty$ при $x \to \infty$. Однако при этом приходится накладывать дополнительные ограничения на гладкость

Теорема 2. *Если* $\chi(x)$ *в представлении* (1) *удовлетворяет условиям* I'), II) — IV) *и условиям*

V) $|\chi^{(IV)}(x)| < L_2|\chi'''(x)|/x$;

VI) $|\chi^{(V)}(x)| < L_3|\chi^{(IV)}(x)|/x$,

то имеют место асимптотические представления (2) — (4).

Институт математики
Сибирского отделения академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
18 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. В. Нагаев, Изв. АН УзбССР, сер. физ.-матем., 6, 37 (1962). [2] А. В. Нагаев, Теория вероятн. и ее примен., 14, № 1, 51 (1969).