

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О СХОДИМОСТИ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 11 V 1972)

В работе изучаются некоторые вопросы сходимости последовательностей операторов и связанная с этим задача об однозначной определенности оператора в том или ином классе. Аналогичному вопросу о сходимости, как правило, положительных операторов к тождественному, посвящены работы, упомянутые в обзоре ⁽¹⁾, статьи ⁽²⁻⁸⁾, а также работы ^(9, 10), являющиеся отправным пунктом дальнейшего изложения. Используемые ниже сведения из теории пространств Канторовича см. в ⁽¹¹⁾.

Пусть X — упорядоченное векторное пространство, Y — K -пространство и $T \in \mathcal{L}^+(X, Y)$ (т. е. T — положительный линейный оператор, действующий из X в Y). Конус (= вышуклый конус) H в X называется супремальным генератором пространства X относительно оператора T , если H минорирующий (т. е. для любого x из X множество $\{h \in H: h \leq x\}$ не пусто) и, кроме того,

$$Tx = \sup_{h \leq x, h \in H} Th.$$

Если $X \subset Y$ и $T = E$, где E — оператор тождественного вложения X в Y , то данное определение совпадает со стандартным определением супремального генератора относительно K -пространства; если Y есть K -пространство вещественных чисел R , то это определение переходит в определение генератора относительно функционала ⁽⁹⁾.

В рассматриваемой ситуации справедлива следующая теорема (ср. ⁽¹⁰⁾), которую следует считать специальным случаем теоремы Хана — Банаха — Канторовича.

Теорема 1. Пусть H — минорирующий конус в X . Следующие утверждения эквивалентны:

1) H — супремальный генератор пространства X относительно оператора T .

2) Для любой последовательности операторов (T_n) , $T_n \in \mathcal{L}^+(X, Y)$, такой, что $\lim_n T_n h \geq Th$ для всех h из H , следует, что $(o) - \lim_n T_n x = Tx$ для всех x из X .

3) $\text{Spr}(T, H) = \{T' \in \mathcal{L}^+(X, Y) : T'h \geq Th (h \in H)\} = \{T\}$.

В случае телесности конуса положительных элементов в X условие минорантности H можно отбросить.

Рассмотрим, например, в качестве Y K -пространство H_G функций, гармонических и ограниченных в ограниченной области (числового пространства) G с компактной границей ∂G . В качестве X возьмем $C(\partial G)$, где $C(Q)$ — пространство непрерывных на Q функций. Пусть $HC_{\bar{G}}$ — пространство функций, гармонических в G и непрерывных в $\bar{G} = G \cup \partial G$. Обозначим через HC_G пространство следов функций из $HC_{\bar{G}}$ на G , а через $H_{\partial G}$ — пространство следов на ∂G . Ясно, что HC_G и $H_{\partial G}$ естественным образом изоморфны и могут быть отождествлены. Пусть, далее, $T: C(\partial G) \rightarrow H_G$ — оператор, сопоставляющий каждой функции из $C(\partial G)$ соответствующее решение обобщенной задачи Дирихле. Тогда теорема Келдыша ⁽¹²⁾ пере-

пишется в виде $\text{Spr}(T, H_{\partial G}) = \{T\}$. Отсюда, по теореме 1, получаем для $f \in C(\partial G)$ представление

$$Tf = \sup \{h \in HC_G: h(x) \leq f(x), x \in \partial G\}.$$

Очевидно, в свою очередь, что теорема Келдыша является простым следствием указанного представления.

Теорему 1 можно применить для исследования операторов $T: V \rightarrow Y$ (V — нормированное пространство, Y — K -пространство), обладающих абстрактной нормой, т. е. таких, что множество $TS = \{|Tx|: \|x\| \leq 1\}$ ограничено (элемент $\sup TS$ называется абстрактной нормой оператора T и обозначается $|T|$). Переход к случаю положительных операторов происходит с помощью порядковой надстройки (см., например, ⁽¹³⁾). Напомним, что порядковой надстройкой нормированного пространства V называют пространство $V \times R$, упорядоченное телесным конусом $\{(x, t) \in V \times R: \|x\| \leq t\}$ — надграфиком функционала $x \mapsto \|x\|$.

Теорема 2. Пусть H — конус в V и T — обладающий абстрактной нормой оператор, $T: V \rightarrow Y$. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Конус $\tilde{H} = H \times (-R_+)$, где $R_+ = \{t \in R: t \geq 0\}$, является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно оператора $(T, |T|): (x, t) \mapsto Tx + t|T|$.

2) Для каждого x из V имеет место представление

$$Tx = \sup_{h \in H} (Th - |T| \|x - h\|).$$

3) Для любой последовательности $(T_n), T_n: V \rightarrow Y$, такой, что $\overline{\lim}_n |T_n| \leq |T|$ и $\lim_n T_n h \geq Th$ для всех h из H , выполняется $(o) - \lim_n T_n x = x$, $x \in V$.

4) Для любого оператора $T': V \rightarrow Y$ такого, что $|T'| \leq |T|$ и, кроме того, $T'h \geq Th$, ($h \in H$), следует, что $T' = T$.

В случае, когда $Y = R$, эта теорема переходит в аналог известного результата Шмульяна ⁽¹⁴⁾, см. также ⁽¹⁵⁾. Аналогичное утверждение справедливо также в случае, когда V нормируется при помощи произвольного K -линеала.

Особенный интерес представляют конечные генераторы, которые при естественных предположениях, как известно ⁽¹⁰⁾, существуют лишь в K -линеалах ограниченных элементов. В дальнейшем поэтому мы остановимся особо на случае, когда V является KN -линеалом ограниченных элементов. Прежде всего, для конуса H в V условимся через H обозначать коническую оболочку элемента $(-1, -1)$, где 1 — единица в V , и конуса $\{(h, -h) \in V \times V: h \in H\}$ в пространстве $V \times V$.

Имеет место эффект «удвоения генератора», именно:

Теорема 3. Следующие утверждения эквивалентны:

1) H является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно оператора $(E, 1)$, где E — вложение V в Y .

2) H является супремальным генератором пространства $V \times Y$ относительно оператора $E: (x_1, x_2) \mapsto x_1$.

3) Для любой последовательности (T_n) , где $T_n: V \rightarrow Y$, $\overline{\lim}_n |T_n| \leq 1$ и $\lim_n T_n h \geq h$ для $h \in H$, выполняется $(o) - \lim_n T_n x = x$, $x \in V$.

4) Для любого оператора $T: V \rightarrow Y$ такого, что $|T| \leq 1$ и, кроме того, $Th \geq h$, $h \in H$, выполняется $T = E$.

При применении этой теоремы следует иметь в виду, что подпространство H в V обладает тем свойством, что $\tilde{H}$ — супремальный генератор относительно оператора E в том и только том случае, если $\tilde{H}$ — супремальный генератор $V \times V$ относительно K -пространства $Y \times Y$.

Приведем типичное приложение описанного эффекта. Рассмотрим метрический компакт Q , снабженный положительной бэровской мерой. Через $S_\mu(Q)$ обозначим соответствующее пространство измеримых функций. Будем считать компакт Q реализованным в сопряженном пространстве $C'(Q)$, т. е. отождествлять точку x из Q с мерой Дирака $\varepsilon_x: f \mapsto f(x)$. Положим $\hat{Q} = Q \cup (-Q)$ и определим на $\hat{Q}$ меру μ , считая для бэровского множества e в $\hat{Q}$, что

$$\mu(\hat{e}) = \mu(e \cap Q) + \mu(- (e \cap (-Q))).$$

Если H — подпространство в $C(Q)$, то через $\hat{H}$ обозначим конус в $C(\hat{Q})$, натянутый на функцию -1 и множество, состоящее из функций $\hat{h}$, где для h из H и x из Q считается

$$\hat{h}(\varepsilon_x) = h(x), \quad \hat{h}(-\varepsilon_x) = -h(x)$$

(мы, разумеется, полагаем, что в $\hat{Q}$ индуцирована широкая топология).

Конкретизация теоремы 3 приводит к следующему результату.

Теорема 4. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Мера μ максимальна в упорядоченности Шоке, порожденной конусом $\hat{H}$.

2) Конус H является супремальным генератором пространства $C(Q) \times C(Q)$ относительно K -пространства $S_\mu(Q) \times S_\mu(Q)$.

3) Если последовательность (T_n) операторов из $C(Q)$ в $S_\mu(Q)$ такова, что $|T_n|1 \leq 1$ и для всякого h из H последовательность $(T_n h)$ сходится к h почти всюду (соответственно по мере), то для любой функции f из $C(Q)$ последовательность $(T_n f)$ сходится к f почти всюду (соответственно по мере).

Представляет интерес заменить в приведенных теоремах абстрактную норму на «обыкновенную», ибо в последнем случае имеют место специфические явления. К сожалению, простые примеры показывают, что в теоремах 2—4 заменить абстрактную норму на обычную (даже когда Y есть KB -пространство с аддитивной нормой) нельзя. Отметим, однако, что при $Y = B(Q)$, где $B(Q)$ — пространство ограниченных на Q функций, $|T| \leq 1 \Leftrightarrow \|T\| \leq 1$. При этом, если Q — компакт, то в теореме 3 можно говорить о равномерной сходимости. В частности, при $V = C(Q)$ получающийся результат содержит соответствующий факт о нерастягивающих операторах из ⁽⁸⁾.

Заменить абстрактную норму на обычную в некотором смысле можно также для компактных операторов со значениями в пространстве непрерывных на компакте Q функций. При этом рабочим аппаратом служит теорема Майкла ⁽¹⁰⁾.

Теорема 5. Пусть V — нормированное пространство, T — компактный оператор, $T: V \rightarrow C(Q)$ и H — конус в V , а ε — положительное число. Имеют место импликации (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) и (4) $\Rightarrow$ (1), где:

1) Конус H является супремальным генератором порядковой надстройки пространства V относительно функционала $(T_x, \|T\|)$, $T_x: v \mapsto (Tv)(x)$, для любого x из Q .

2) Для любого оператора $T': V \rightarrow B(Q)$ такого, что $\|T'\| \leq \|T\|$ и, кроме того, $T'h \geq Th$, $h \in H$, следует, что $T' = T$.

3) Для любой последовательности (T_n) операторов $T_n: V \rightarrow C(Q)$ таких, что $\lim_n \|T_n\| \leq \|T\|$ и равномерный $\lim_n T_n h \geq Th$ для всех h из H , следует, что (T_n) сходится в сильной операторной топологии к T .

4) Для любого компактного оператора $T': V \rightarrow C(Q)$ такого, что $\|T'\| \leq (1 + \varepsilon)\|T\|$ и $T'h \geq Th$, $h \in H$, следует, что $T' = T$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. А. Гаркави, В сборн. Математический анализ, 1967. Итоги науки, М., 1969, стр. 75.
- ² Р. К. Васильев, Сборн. пер. Математика, 6, 35 (1970).
- ³ Р. К. Васильев, Матем. заметки, 8, 475 (1970).
- ⁴ М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, УМН, 23, 213 (1968).
- ⁵ М. А. Krasnosel'skii, E. A. Lifsic, Studia math., 31, 5, 455 (1968).
- ⁶ Л. Г. Лабскер, ДАН, 197, № 6, 1264 (1971).
- ⁷ Р. М. Минькова, Ю. А. Пашкин, Матем. заметки, 6, 5, 591 (1969).
- ⁸ Ю. А. Пашкин, Mathematica (R. S. R.), 11, № 2, 355 (1969).
- ⁹ С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов, ДАН, 199, № 4, 776 (1971).
- ¹⁰ С. С. Кутателадзе, А. М. Рубинов, Оптимизация, 3, 20, 120 (1971).
- ¹¹ Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пипскер, Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950.
- ¹² Н. С. Ландкоф, Основы современной теории потенциала, «Наука», 1966.
- ¹³ G. Jameson, Ordered Linear Spaces, N. Y., 1970.
- ¹⁴ В. Л. Шмультян, ДАН, 27, 7, 643 (1940).
- ¹⁵ K. Fan, I. Glicksberg, Duke Math. J., 25, 4, 553 (1958).
- ¹⁶ E. Michael, Ann. Math., 63, 2, 361 (1956).