

УДК 517.948

МАТЕМАТИКА

Р. С. ЛЕВИТИН, Т. Л. ПЕРЕЛЬМАН, И. В. ТРАВНИЦКАЯ
О ПРЕДЕЛЬНОМ РЕЖИМЕ ОДНОГО КЛАССА
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
С НЕИНТЕГРИРУЕМОМ ЯДРОМ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 10 V 1972)

Хорошо известно, что многие из результатов о существовании решений операторных уравнений являются следствием существования неподвижной точки при непрерывном отображении выпуклого бикомпакта в самого себя в локально выпуклом линейном топологическом пространстве (¹).

В работах (²⁻⁷) изучаются операторные интегро-дифференциальные уравнения вида

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = f\left[t; u(t, x); \int_D K(t, x, s, u(s, x)) ds\right],$$

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = f\left[t, x, u(t, x); \int_a^t K(t, x, s, u(s, x)) ds\right]$$

в банаховых пространствах. Устанавливаются локальные и нелокальные теоремы существования и теоремы единственности решения задачи Коши, существования предельного режима, непрерывной зависимости от начальных данных, известных функций и др. Эти результаты, естественно, теряют силу, если ядро неинтегрируемое.

В настоящей статье для случая неинтегрируемого ядра у операторного интегро-дифференциального уравнения вольтерровского типа выделяется класс решений, для которых существует предельный режим и имеет место непрерывная зависимость таких решений от известных функций. Сформулируем полученные результаты.

Пусть: 1) D — замкнутая ограниченная область k -мерного евклидова пространства, $y \in D$; 2) $u(t, y)$ — n -мерная векторная функция; 3) $f(t, y, \tau, u)$, $F(t, y, \tau, s, u)$ — операторы, отображающие n -мерный вектор u в n -мерные векторы; 4) $W(t, y, \tau, z, v)$ — n -мерная векторная функция от числовых аргументов t, τ , k -мерного вектора y , n -мерных векторов z, v , определенная в области

$$G\{t \geq \tau \geq a; y \in D; \|z\|, \|v\| < \infty\},$$

удовлетворяет условию Липшица

$$\|W(t, y, \tau, z_1, v_1) - W(t, y, \tau, z, v)\| \leq L(\|z_1 - z\| + \|v_1 - v\|),$$

причем постоянная L не зависит от значений аргументов функции W ; 5) нормы вектора $u(t, y)$ и матрицы $H(t, y)$ определяются следующим образом:

$$\|u(t, y)\| = \sup_{y \in D} \sum_{k=1}^n |u_k(t, y)|, \quad \|H(t, y)\| = \sup_{y \in D} \sum_{i,k=1}^n |H_{i,k}(t, y)|.$$

Ниже все встречающиеся функции предполагаются непрерывными, если не оговорено противное. Интегрирование понимается в смысле Бохнера (⁸).

1°. Предельный режим. Будем говорить, что кривая $h = h(t)$ является предельным режимом семейства кривых $\Gamma\{u(t, y)\}$, если

$$\|u(t, y) - h(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty.$$

Векторную функцию $h(t)$ назовем m -функцией, если она принадлежит одному из следующих классов непрерывных функций: 1) периодических с периодом ω ; 2) периодических с периодом 2ω и меняющих знак через полупериод ($h(t + \omega) = -h(t)$); 3) почти периодических в смысле Бора; 4) ограниченных на числовой прямой.

Векторную функцию $u(t, y)$ будем называть O_l -функцией, если

$$\frac{\|u(t, y)\|}{(t-a)^l} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow a, \quad \text{где число } l > 0.$$

Пусть A — постоянная матрица порядка $n \times n$, $K(x)$ — квазиполиномиальная матрица вида $n \times n$:

$$K(x) = \sum_{j=1}^r Q_j(x) e^{\beta_j x},$$

где $Q_j(x)$ — полином относительно x с n -квадратными матричными коэффициентами. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) (T), если вещественные части всех корней характеристического полинома ⁽⁵⁾ системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dv(t)}{dt} = Av(t) + \int_a^t K(t-s)v(s)ds$$

отрицательны. Тогда, в силу условия (T), фундаментальная матрица $V(t, s)$ системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{dv}{dt} = Av(t) + \int_s^t K(t-s)v(s)ds,$$

нормальная при $t = s$ ($V(s, s) = E$ — единичная матрица), при всех $t \geq s \geq a$ удовлетворяет неравенству

$$\|V(t, s)\| = \|V(t-s)\| \leq \beta e^{-\alpha(t-s)},$$

где α и β — некоторые положительные постоянные.

Предположим далее, что выполнены следующие условия:

2) (N_1), если в области G справедливы неравенства

$$\|f(t, y, u(t, y))\| \leq \alpha(t)\|u(t, y)\| + \alpha_1(t),$$

$$\|F(t, y, \tau, u(t, \tau))\| \leq \gamma(t, \tau)\|u(t, \tau)\| + \gamma_1(t, \tau),$$

где $\alpha(t)$, $\alpha_1(t)$, $\gamma(t, \tau)$, $\gamma_1(t, \tau)$ — неотрицательные функции и $\alpha(t)$, $\gamma(t, \tau)$ непрерывны по t на всяком интервале $[a + \varepsilon, b]$, $\varepsilon > 0$. При $t = a$ допускается неинтегрируемая особенность типа $(t-a)^{-1}$ у функции

$$p(t) \stackrel{\text{df}}{=} \alpha(t) + \int_a^t \gamma(r, t)dr,$$

точнее, требуем, чтобы $\limsup_{t \rightarrow +a} (t-a)p(t) \leq l/(\beta L)$.

3) (S_1), если

$$K(t) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{b(t)}{L} + \alpha_1(t) + \int_a^t \gamma_1(t, \tau)d\tau \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty,$$

где $b(t) = \|W(t, y, 0, 0)\|$;

$$\int_{+a}^{\infty} \frac{K_1(s)}{(s-a)^{1+t}} ds < \infty, \quad K_1(s) \stackrel{\text{df}}{=} \int_a^s e^{a\tau} (k(\tau) + \psi(\tau)) d\tau.$$

4) (M), если $r(t) \stackrel{\text{df}}{=} \alpha(t) + \int_a^t \gamma(t, \tau) d\tau \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Тогда справедлива

Теорема 1. Если выполнены условия (T), (N₁), (S₁), (M), а $\psi(t)$ — m -функция, то все O_1 -решения системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, y)}{\partial t} = & Au(t, y) + \int_a^t K(t-s) u(s, y) dy + \\ & + W\left\{t; y; u(t, y); \int_a^t F[t, y, \tau, u(\tau, y)] d\tau\right\} + \psi(t) \end{aligned} \quad (1)$$

имеют один и тот же предельный m -режим*.

Замечание. Теорема 1 справедлива и без требования условия (M), если $(t-a)p(t) \leq l/\beta L$ при $t \geq a$.

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 1 и $\psi(t) \equiv \psi$ — кусочно-постоянный вектор, то при $t \rightarrow \infty$ все O_1 -решения системы (1) входят в точку

$$Q = \int_{-\infty}^t V(t-s) \psi ds$$

фазового пространства $(u_1, u_2, \dots, u_n)$.

Следствие 2. При условиях теоремы 1 и $\psi(t) \equiv 0$ все O_1 -решения системы (1) входят в начало координат фазового пространства.

Следствие 3. Пусть: 1) вещественные части всех характеристических чисел матрицы A отрицательны; 2) векторные функции $f(t, y, u)$, $F(t, y, \tau, s, u)$ удовлетворяют условиям (N₁), (S₁), (M); 3) $\psi(t)$ — m -функция.

Тогда все решения системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u(t, y)}{\partial t} = Au(t, y) + f(t, y, u(t, y)) + \int_a^t \int_D F(t, y, \tau, s, u(\tau, s)) ds d\tau + \psi(t)$$

имеют один и тот же предельный m -режим

$$n(t) = \int_{-\infty}^t V(t-s) \psi(s) ds,$$

где $V(t)$ — фундаментальная матрица системы

$$\frac{dv}{dt} = Av.$$

2°. Непрерывная зависимость решений. Изучение непрерывной зависимости решения $v(\psi)$ некоторого операторного уравнения в точке $\psi = \psi_0$ приводится к изучению непрерывной зависимости решения

* Предельный m -режим означает, что предельный режим есть m -функция.

$u(f)$ уравнения

$$u = f + A(u) \quad [A(0) = 0]. \quad (2)$$

Говорят, что решение уравнения (2) непрерывно зависит от f в точке $f = 0$, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для каждого решения $u(f)$ уравнения (2) выполнено неравенство $\|u(f)\| < \varepsilon$, если только $\|f\| < \delta$. Очевидно, что если уравнение $u = A(u)$ имеет нетривиальное решение или имеет неинтегрируемое ядро, то не может быть и речи о непрерывной зависимости для всяких решений уравнения (2) в точке $f = 0$. Однако для O_1 решения теоремы о непрерывной зависимости от ψ могут быть получены. Приведем их.

Будем говорить, что выполнено условие (M_2) , если для всех $a_1 \geq t \geq \tau \geq a$

$$1) f(t, y, 0) = F(t, y, \tau, 0) = 0, \quad W(t, y, \tau, 0, 0) = 0;$$

$$2) \|j(t, y, u, (t, y))\| \leq \alpha(t) \omega(t), \quad \omega(t) = \|u(t, y)\|, \quad \|F(t, y, \tau, u(\tau, y))\| \leq \beta(t, \tau) \omega(\tau);$$

3) $p_1(t) = \alpha(t) + \int_t^\infty \beta(r, t) dr$ — интегрируемая функция при всяких $t \leq [a + \varepsilon, a_1]$, $\varepsilon > 0$ такая, что

$$\limsup_{t \rightarrow a} (t - a) p_1(t) \leq l/(\beta L);$$

$$4) \int_a^t \frac{\psi(t)}{(t-a)^l} dt < \infty, \quad \text{где } \psi(t) = \|\psi(t, y)\|.$$

Теорема 2. Если выполнено условие (M_2) , то O_1 -решение системы

$$u(t, y) = \psi(t, y) + \int_a^t W[t; y; \tau; f(\tau, y, u(\tau, y)); \int_a^\tau F(\tau, y, \mu, u) d\mu] d\tau$$

непрерывно зависит от ψ .

Теорема 3. Если выполнено условие (M_2) , то O_1 -решение $u(t, y)$ системы интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, y)}{\partial t} = & A(t) u(t, y) + \int_a^t K(t, \tau) u(\tau, y) d\tau + \\ & + W[t; y; f(t, y, u(\tau, y)); \int_a^t F(t, y, \tau, u(\tau, y)) d\tau] + \psi(t, y) \end{aligned}$$

непрерывно зависит от $\psi(t, y)$.

Предполагается, что матрицы $A(t)$ и $K(t, \tau)$ непрерывны.

В заключение выражаем благодарность чл.-корр. АН СССР А. А. Самарскому за ценные замечания.

Институт тепло- и массообмена
Академии наук БССР
Минск

Поступило
25 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. N. Tichonov, Math. Ann., **111**, 767 (1935). ² А. Н. Тихонов, Бюлл. Московск. ун-в., (А), **1**, 8, 1 (1938). ³ М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, ДАН, **102**, № 1, 13 (1955). ⁴ М. А. Красносельский, С. Г. Крейн, Тр. Воронежск. гос. ун-в., в. 2, 3 (1956). ⁵ Я. В. Быков, О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений, Фрунзе, 1957. ⁶ Я. В. Быков, Сборн. Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, в. 1 (1961). ⁷ Я. В. Быков, Х. М. Салпагаров, Сборн. Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям в Киргизии, в. 2, 91 (1962). ⁸ Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1951.