Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 2

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

М. МЕРЕДОВ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СМЕШАННЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 12 IV 1972)

Пусть дифференциальный оператор K определяется формулой

$$K \equiv k_i(t)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{1}$$

где $k_i(t)$, $i=1, 2, \ldots, m$,— возрастающие и дважды дифференцируемые функции в области $\overline{G}$ и $k_i(t)\cdot t>0$ при $t\neq 0$, а $k_i(0)=0$, причем $k_i'(0)>0$. Здесь и ниже повторение индексов i и j означает суммирование по ним от 1 до m.

Пусть G^- — конечная односвязная область $(m+1)$-мерного эвклидова пространства E_{m+1} точек $(x, t)=(x_1, x_2, \ldots, x_m, t)$, ограниченная снизу характеристическим конусом S_1 оператора K с вершиной, направленной в отрицательную сторону оси Ot и расположенной в полупространстве $t<0$, и сверху — часть S_0 гиперплоскости $t=0$, отсекаемой конусом S_1.

Пусть G^+ — конечная односвязная область, расположенная в полупространстве $t>0$ и ограниченная сверху поверхностью S из класса $A^{(2,\alpha)}$ ($A^{(l,\alpha)}$ означает, что параметрические уравнения поверхности из класса $C^{(l,\alpha)}$, $0<\alpha\leqslant 1$), а снизу — поверхностью S_0. Предположим, что $S\cap S_0 = S_1\cap S_0=\sigma$, $G=G^+\cup G^-$.

В области G рассмотрим уравнение

$$Lu\equiv K(Ku)+k_i(t)A^ju_{x_ix_ix_j}+A^ju_{x_jtt}+A^0k_i(t)u_{x_ix_it}+A^0u_{ttt}+L_1u=f \tag{2}$$

с коэффициентами $A^j=A^j(x, t)$, $j=0, 1, \ldots, m$, из класса $C^3(\overline{G})$ и правой частью $f=f(x, t)$ из пространства $L_2(G)$; L_1 — линейный дифференциальный оператор не выше второго порядка с коэффициентами из класса $C^2(\overline{G})$.

Уравнение (2) гиперболично в области G^-, эллиптично в области G^+ и параболически вырождается на гиперплоскости $t=0$.

Для уравнения (2) рассмотрим следующую задачу.

З а д а ч а I. Найти решение $u(x, t)$ уравнения (2) в области G, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{S\cup S_1}=0, \quad \partial u/\partial n|_S=0. \tag{3}$$

Обозначим через W_{I} множество функций $u(x, t)$ класса $W=C^3(\overline{G})\cap C^4(G)$, для которых $Lu\in L_2(G)$ и соблюдены краевые условия (3).

Для элементов множества W_{I} рассмотрим эрмитову билинейную форму

$$(u, v)_+=\int\limits_G (Ku\cdot Kv+u_{x_i}v_{x_i}+u_tv_t+uv)\,dG. \tag{4}$$

Поскольку $(u, u)_+\geqslant 0$, и $(u, u)_+=0 \leftrightarrow u=0$.

Следовательно, для формы (4) соблюдены все аксиомы скалярного произведения. При таком определении скалярного произведения множество W_{I} становится линейным пространством с нормой $\|u\|_+ = (u, u)_+$. Если оно неполно, то, пополняя его обычным способом, получим полное гильбертово пространство, которое обозначим через H_+. Так как W_{I} плотно в H_+, то пополнение W_{I} до полного нормированного пространства по норме $\|u\|_+ = (u, u)_+$ порождает расширение оператора K. Нетрудно показать, что это расширение оператора K совпадает с замыканием его. Расширенный оператор снова обозначим через K.

В дальнейшем потребуется следующая

Лемма 1. *Если $u \in W_{\text{I}}$, то имеет место неравенство*

$$\|u\|_1 \leqslant C\|Ku\|_0, \tag{5}$$

где C — здесь и ниже положительная постоянная, не зависящая от функции $u(x, t)$, $\|\cdot\|_l$ — норма в пространстве Соболева (1).

Докажем более общую лемму, из которой как частный случай следует лемма 1.

Лемма 2. *Если коэффициенты оператора*

$$K_1 \equiv K + a^i \frac{\partial}{\partial x_i} + b\frac{\partial}{\partial t} + c,$$

таковы, что $a^i = a^i(x, t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $b = b(x, t)$, $c = c(x, t) \in C^1(\overline{G})$ и $2c - a^i_{x_i} - b_t < 0$ при $t \geqslant 0$, тогда для любой функции $u \in C^1(\overline{G}) \cap C^2(G) = C(K_1)$, удовлетворяющей краевому условию (3), *справедливо неравенство*

$$\|u\|_1 \leqslant C\|K_1 u\|_0. \tag{5'}$$

Доказательство. По формуле Остроградского с учетом граничных условий (3) получим

$$2\int\limits_{G+} (-\lambda^2 u + u_t)\, K_1 u\, dG = \int\limits_{G+} \{[k_i'(t) + 2\lambda^2 k_i(t)]\, u_{x_i}^2 + (\lambda^2 + 2b)\, u_t^2 + $$
$$+ 2a^i u_{x_i} u_t + [-\lambda^2(2c - a^i_{x_i} - b_t) - c_t]\, u^2\}\, dG +$$
$$+ \int\limits_{S_0} [-u_t^2(x, 0) + 2\lambda^2 u(x, 0)\, u_t(x, 0) + \lambda^2 b(x, 0) - c(x, 0)\, u^2(x, 0)]\, ds.$$

Поскольку коэффициенты оператора K_1 ограничены в области $\overline{G}$, то, в силу неравенства $2a\xi\eta \geqslant -\varepsilon a^2\xi^2 - \frac{1}{\varepsilon}\eta^2$, справедливого для любых $\varepsilon > 0$, при соответствующем выборе λ^2 имеем

$$C_1 \int\limits_{G+} (u_{x_i}^2 + u_t^2 + u^2)\, dG - C_2 \int\limits_{S_0} [u^2(x, 0) + u_t^2(x, 0)]\, ds \leqslant \int\limits_{G+} (K_1 u)^2\, dG. \tag{6}$$

Если функция $u \in C(K_1)$ и $u|_{S_1} = 0$, $k_i'(0) > 0$, то имеем (см. (2))

$$C_3 \int\limits_{G-} (u_{x_i}^2 + u_t^2 + u^2)\, dG + C_4 \int\limits_{S_0} [u^2(x, 0) + u_t^2(x, 0)]\, ds \leqslant \int\limits_{G-} (K_1 u)^2 dG. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует неравенство (5′).

Лемма 3. *Пусть коэффициенты оператора K_1 удовлетворяют условиям леммы 2, тогда для любой функции $u \in C(K_1)$, удовлетворяющей краевому условию $u|_{S \cup S_1} = 0$, справедливо неравенство* (5′), *если выполняется одно из следующих условий:*

1) *Поверхность $S \in A^{(2,\alpha)}$ такова, что внешняя нормаль к S при достаточно малом t ортогональна к оси Ot, т. е. найдется такое $\delta > 0$, что при $0 \leqslant t \leqslant \delta$ $\cos(n_S, t) = 0$.*

2) *Внешняя нормаль n_S к S при $0 \leqslant t \leqslant \delta$ (где δ — достаточно малое число) удовлетворяет условию $\cos^2(n_S, x_i) \geqslant \beta_0$, $0 < \beta_0 \leqslant 1$ и $a^i(x, 0) = 0$.*

Доказательство. Пусть имеет место условие 1) леммы, тогда по формуле Остроградского из равенства

$$(lu, \ K_L u)_0 = \int\limits_{G+} (-\lambda^2 u + \beta u_t) K_1 u \, dG$$

получаем (6), где $\beta(x, t) = (\delta - t)^2$ при $0 \leqslant t \leqslant \delta$ и $\beta(x, t) = 0$ при $t > \delta$.

Если имеет место условие 2) леммы, то проведем в области G^+ гладкую поверхность S_δ, лежащую в полосе $0 < t \leqslant \delta$ и проходящую через пересечение поверхности S и гиперплоскости $t = \delta$. Поверхность S_δ настолько гладко прилегает к поверхности S, что граница области $G_\delta{}^+$, ограниченной поверхностями S и S_δ, из класса $A^{(2,\ \alpha)}$.

Построим функции $\alpha^i = \alpha^i(x, t)$ следующим образом ([3]): $\alpha^i(x, t) = \varepsilon \cos(n_S, x_i)$ на поверхности S, а на гиперплоскости S_0 $\alpha^i(x, t)$ — решения уравнения $\Delta_x \alpha^i(x) = 0$, удовлетворяющие граничным условиям $\alpha^i(x)\,|_\sigma = \varepsilon \cos(n_S, x_i)\,|_{t=0}$, $\varepsilon > 0$.

В области G^- положим $\alpha^i(x, t) = \alpha^i(x)$, в области G^+ $\alpha^i(x, t)$ — решения уравнения $\Delta \alpha^i(x, t) = 0$, удовлетворяющие граничным условиям

$$\alpha^i(x, t)\,|_S = \varepsilon \cos(n_S, x_i), \qquad \alpha^i|_{S_0} = \alpha^i(x).$$

Функцию $\beta(x, t)$ построим следующим образом: $\beta(x, t) = \varepsilon\beta_0(\delta - t)^2$ в области $\overline{G} \setminus G_\delta{}^+$, а в области $G_\delta{}^+$ — как решение уравнения $\Delta^2 \beta = 0$, удовлетворяющее граничным условиям

$$\beta\,|_{S_\delta} = \varepsilon\beta(\delta - t)^2, \quad \partial\beta/\partial n\,|_{S_\delta} = -2\varepsilon\beta_0(\delta - t)\cos(n_{S_\delta}, t),$$
$$\beta\,|_S = 0, \quad \partial\beta / \partial n_S = 0,$$

где n — внешняя нормаль к границе области.

Применяя к интегралу

$$\int\limits_G (\gamma u + \alpha^i u_{x_i} + \beta u_t) K_1 u \, dG = (lu, \ K_1 u)_0,$$

где

$$\gamma = \begin{cases} -\lambda^2 & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

формулу Остроградского при достаточно большом λ^2 и достаточно малом $\varepsilon > 0$, получим неравенство

$$C_5 \int\limits_{G+} (u_{x_i}^2 + u_t^2 + u^2)\, dG - C_6 \int\limits_{G-} (u_{x_i}^2 + u_t^2 + u^2)\, dG -$$
$$- C_7 \int\limits_{S_0} [u^2(x, 0) + u_t^2(x, 0)]\, ds \leqslant \int\limits_G (K_1 u)^2 \, dG. \tag{8}$$

Из (7) и (8) имеем (5′).

Из леммы 1 следует, что

$$C_1 \|u\|_1 \leqslant \|Ku\|_0 \leqslant \|u\|_+ \leqslant C_2 \|Ku\|_0 \quad \forall u \in H_+. \tag{9}$$

Введем билинейную форму $B(u, v)$, соответствующую дифференциальному оператору L:

$$B(u, v) = (Ku, Kv)_0 + B_1(u, v), \tag{10}$$

где $B_1(u, v) = -(Ku, \ lv)_0 + B_2(u, v)$, $l = A^i \partial / \partial x_i + A^0 \partial / \partial t + A^i_{x_i} + A_t^0$, а $B_2(u, v)$ — билинейная форма, состоящая из произведений линейных дифференциальных выражений не выше первого порядка.

Если $u, v \in W_1$, тогда, в силу (3), имеем $Lu = f \leftrightarrow B(u, v) = (f, \ v)_0$.

Определение. Обобщенным решением задачи I назовем любую функцию $u \in H_+$, если

$$B(u, v) = (f, v)_0 \quad \forall v \in W_1.$$

Используя теорему Рисса и лемму Лакса — Мильграмма (см. ([4])), можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (2) *таковы, что для любых* $u \in H_+$ *справедливо неравенство* $B_1(u, u) \geqslant 0$; *тогда для любой функции* $f \in L_2(G)$ *существует и притом единственное обобщенное решение задачи* I *из пространства* H_+.

Туркменский государственный университет
им. А. М. Горького
Ашхабад

Поступило
24 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, 1962. [2] М. Мередов, ДАН, **201**, № 3 (1972). [3] В. П. Михайлов, ДАН, **175**, № 5, 1012 (1967). [4] М. Нагумо, Лекции по современной теории уравнений в частных производных, М., 1967.