Доклады Академии наук СССР
1973. Том 208, № 5

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

В. П. ЗОЛОТАРЕВ

О ФАКТОРНЫХ КОНЕЧНОКРАТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ, ПОВЫШАЮЩИХ РАЗМЕРНОСТЬ

(Представлено академиком П. С. Александровым 24 IV 1972)

Для случая замкнутого отображения Гуревичем была доказана следующая

Теорема. *Пусть f — замкнутое $(k+1)$-кратное отображение пространства X на пространство Y, где X и Y — метрические пространства со счетной базой.*

Тогда $\dim Y \leqslant \dim X + k$.

Позднее этот результат был обобщен А. Зарелуа на случай произвольных нормальных пространств ([4]).

А. В. Архангельским в семинаре П. С. Александрова было предложено рассмотреть следующий специальный случай факторных конечнократных отображений. Пусть на множестве Y заданы топологии $\tau_1, \ldots, \tau_{n+1}$, за X примем свободную сумму пространств (Y, τ_i), $i = 1, \ldots, n+1$, а в качестве пространства $\tilde{Y}$ возьмем множество Y с топологией $\tau = \bigcap\limits_{i=1}^{n+1} \tau_i$.

Мной была доказана теорема, подтвердившая гипотезу А. В. Архангельского: *размерность* $\dim$ *метрического пространства X не превосходит n, тогда и только тогда, когда его топологию можно представить в виде пересечения 0-мерных метрических топологий $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{n+1}$, которые подчинены следующему условию: $(X, \bigcap\limits_{i=1}^{k} \tau_i)$ — метрическое пространство для каждого $k = 1, 2, \ldots, n+1$* ([5]).

Таким образом, всякое n-мерное метрическое пространство можно представить как факторный $(n+1)$-кратный образ 0-мерного метрического пространства.

Рассмотрим теперь другую задачу, также поставленную А. В. Архангельским: пусть f — факторное $(k+1)$-кратное отображение 0-мерного метрического пространства X на метрическое пространство. Можно ли утверждать, что $\dim Y \leqslant k$?

Лемма. *Пусть $\dim Y \geqslant k$. Тогда существует замкнутое $Y' \subset Y$ такое, что для каждого открытого $U \subset Y$ $\dim (U \cap Y') \geqslant k$ (если $U \cap Y' \neq \Lambda$).*

Доказательство. Пусть $\Gamma = \{U\colon U$ открыто в Y и $\dim U < k\}$ и $G = \bigcup\limits_{U \in \Gamma} U$. Так как Y метризуемо, то в Γ можно вписать покрытие, локально-конечное в G. Следовательно, $\dim G < k$. Из построения видно, что за Y' можно принять $Y \backslash G$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что само Y обладает отмеченным свойством. Будем также предполагать, что $f^{-1}(y)$ для каждого $y \in Y$, состоит ровно из двух точек.

Теорема. *Пусть $f\colon X \to Y$, где X и Y — метрические пространства, f — факторное двукратное отображение и* $\dim X = 0$. *Тогда* $\dim Y \leqslant 1$.

Доказательство. Допустим противное: пусть $\dim Y \geqslant 2$. Тогда в Y существуют по крайней мере две пары замкнутых множеств C_1, C_1' и

C_2, C_2' таких, что для любых двух перегородок D_1 и D_2 $D_1 \cap D_2 \neq \Lambda$ (D_1 — перегородка между C_1 и C_1', а D_2 — перегородка между C_2 и C_2').

Так как $\dim X = 0$, то существуют открыто-замкнутые множества U, $V \subset X$ такие, что $f^{-1}(C_1) \subset U$, $f^{-1}(C_1') \subset X/U = U'$, $f^{-1}(C_2) \subset V$, $f^{-1}(C_2') \subset \subset X \setminus V = V'$.

Обозначим малые образы множеств U, U', V, V' через A, A', B и B' соответственно*. Так как Y метризуемо, то f — псевдо-открытое отображение (см. ([2])) и, следовательно, $[A] \cap A' = A \cap [A'] = B \cap [B'] \neq [B] \cap \cap B' = \Lambda$.

Пусть $D_1 = [A] \cap [A']$ и $D_2 = [B] \cap [B']$. Покажем, что множество D_1 является перегородкой между C_1 и C_1'. Имеем: $C_1 \subset A$, $C_1' \subset A'$ и $D_1 \cap \cap (A \cup A') = \Lambda$. Докажем, далее, что $[A] \cup [A'] = Y$. Пусть это не так. Тогда $G = Y \setminus [A] \cup [A']$ не пустое, открытое в Y множество, для которого $f^{-1}(G) = W_1 \cup W_2$ и $f(W_1) = f(W_2) = G$, где $W_1 = f^{-1}(G) \cap U$, $W_2 = = f^{-1}(G) \cap U'$, W_1, W_2 — открытые непересекающиеся множества. Так как $f|_{W_1 \cup W_2}$ — факторное отображение, топология пространства G является пересечением двух нуль-мерных топологий, одна из которых посредством f отождествляется с топологией пространства W_1, а другая — с топологией пространства W_2. Поэтому (см. ([5])) $\dim G \leqslant 1$, хотя должно быть $\dim G = \dim X = 2 > 1$ в силу допущения о размерности Y и соглашения об Y, предшествующего теореме.

Итак, доказано, что D_1 — перегородка между C_1 и C_1' (и даже между A и A'). Аналогично, D_2 — перегородка между C_2 и C_2'.

Рассмотрим два случая:

1) $[A \cap B] \cup [A \cap B'] \supset D_1$. Так как f — псевдо-открытое отображение, то

$$\begin{gathered} U \cap f^{-1}([A \cap B] \cap D_1) \subset U \cap V \cap f^{-1}(D_1), \\ U \cap f^{-1}([A \cap B'] \cap D_1) \subset U \cap V' \cap f^{-1}(D_1). \end{gathered} \tag{1}$$

В силу выбора множеств C_1, C_1', C_2, C_2', существует $y \in [A \cap B] \cap D \cap \cap [A \cap B']$. Так как $y \in D_1$, то множество $f^{-1}(y) \cap U$ состоит из одной точки, которую мы обозначаем через x. Из (1) следует, что если $x \in V$, то $f(x) \notin [A \cap B']$. Таким образом, рассмотренный случай невозможен.

2) $[A \cap B] \cup [A \cap B'] \not\supset D_1$, тогда $A \not\subset [A \cap B] \cup [A \cap B']$. Так как $A \cap \cap [A'] = \Lambda$ и D_2 нигде не плотно, $Y \setminus ([A \cap B] \cup [A \cap B'] \cup [A'] \cup D_2) = = G \neq \Lambda$.

Заметим следующее:

а) $[A \cap G] \supset G$, в противном случае $\Lambda \neq G \setminus [A] \subset Y \setminus (A \cup A')$ и топологию на $G \setminus [A]$ можно представить в виде пересечения двух 0-мерных топологий ($f^{-1}(G \setminus [A]) \cap U$ и $f^{-1}(G \setminus [A]) \cap U'$), а это противоречит выбору Y (по предположению, каждое открытое в Y множество имеет размерность $\geqslant 2$);

б) $[(B \cap B'] \cap G] \supset G$; это получается аналогичными рассуждениями. Так как $[B] \cap B' = [B'] \cap B = \Lambda$, то можно предположить, что $G \setminus [B'] = = G_1 \neq \Lambda$;

в) пусть $K_1 = \{y\colon y \in G_1$ и $f^{-1}(y) \subset (U \cap V) \cup (U' \cap V')\}$, $K_2 = \{y\colon y \in \in G_1$ и $f^{-1}(y) \subset (U' \cap V) \cup (U \cap V')\}$; тогда $[K_2] \supset G_1$.

Действительно, в противном случае $G_1 \setminus [K_2]$ можно было бы представить в виде пересечения двух топологий: $f^{-1}(G_1 \setminus [K_2]) \cap (U \cap V)$ и $f^{-1}(G_1 \setminus [K_2]) \cap (U' \cup V')$. Следовательно, $K_2 \neq \Lambda$. Так как f псевдо-открыто, то $[K_1] \cap K_2 = \Lambda$ и, следовательно, $G_2 = G_1 \setminus [K_1] \neq \Lambda$.

В результате проведенных рассуждений мы получили открытое в Y множество G_2.

Пусть $X_2 = f^{-1}(G_2)$. Дальше мы будем рассматривать только два пространства X_2 и G_2. Пересечение множества, лежащего в Y, с G_2 (соот-

---

* Под малым образом множества U при отображении f понимается $\{y \in Y\colon f^{-1}(y) \subset U\}$.

ветственно с X_2) будем обозначать той же буквой, что и само множество, приписав сверху волну.

Заметим, что $X_2 = W_1 \cup W_2 \cup W_3$, где $W_1 = \tilde{U} \cap \tilde{V}$, $W_2 = \tilde{U}' \cap \tilde{V}$, $W_3 = \tilde{U} \cap \tilde{V}$ и $G_2 = \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{K}_2$, где $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{K}_2 = \tilde{K}_2 \cap \tilde{A} = \Lambda$, $[\tilde{A}] = [\tilde{B}] = [\tilde{K}_2] = G$, причем $f^{-1}(\tilde{A}) \subset W_1 \cup W_3$, $f^{-1}(\tilde{B}) \subset W_2 \cup W_1$, $f^{-1}(\tilde{K}_2) \subset W_2 \cup W_3$, причем

$$\forall a \in \tilde{A} \quad f^{-1}(a) \cap W_1 \neq \Lambda \quad \text{и} \quad f^{-1}(a) \cap W_3 \neq \Lambda,$$

$$\forall b \in \tilde{B} \quad f^{-1}(b) \cap W_2 \neq \Lambda \quad \text{и} \quad f^{-1}(b) \cap W_1 \neq \Lambda,$$

$$\forall k \in \tilde{K}_2 \quad f^{-1}(k) \cap W_2 \neq \Lambda \quad \text{и} \quad f^{-1}(k) \cap W_3 \neq \Lambda.$$

Так как $\dim G_2 \geqslant 2$, то размерность хотя бы одного из трех множеств $\tilde{A} \cup \tilde{B} = f(W_1)$, $\tilde{A} \cup \tilde{K}_2 = f(W_3)$, $\tilde{B} \cup \tilde{K}_2 = f(W_2)$ не меньше 1. Пусть этим свойством обладает множество $\tilde{A} \cup \tilde{B}$.

Так как $\dim W_1 = 0$, а $\dim f(W_1) \geqslant 1$, то $\exists a \in \tilde{A}$ и последовательность $\{y_n\} \subset \tilde{A} \cup \tilde{B}$, сходящаяся к a, такие, что $[f^{-1}(a) \cap W_1] \cap [f^{-1}(\{y_n\}) \cap W_1] = \Lambda$.

Так как G_2 и W_1 — метризуемые пространства и $f^{-1}(\tilde{B}) \cap W_1$ всюду плотно в W_1, то можно считать, что $\{y_n\} \subset \tilde{B}$. Действительно, пусть $x_i = f^{-1}(y_i) \cap W_1$. Так как $\{x_i\}$ замкнуто в W_1, то в W_1 существуют окрестности $Ox_i \ni x_i$ такие, что $[Ox_i] \cap [Ox_j] = \Lambda$ при $i \neq j$.

С другой стороны, так как G_2 метризуемо, то в G_2 существуют окрестности $Oy_i \ni y_i$ такие, что если $y_i' \in Oy_i$, то $\{y_i'\}$ сходится к a. Так как $f^{-1}(\tilde{B}) \cap W_1$ всюду плотно в W_1, то можно выбрать последовательность $\{x_i'\}$, для которой $x_i' \in Ox_i \cap f^{-1}(Oy_i) \cap f^{-1}(\tilde{B})$ при каждом i.

Таким образом, вместо $\{y_i\}$ можно взять последовательность $\{y_i' : y_i' = f(x_i')\}$. Однако это противоречит псевдо-открытости отображения f, так как $a \in [\{y_i'\}]$, $[f^{-1}(\{y_i'\})] = [\{x_i'\}] \cup [W_2 \cap f^{-1}(\{y_i'\})] \subset \{x_i'\} \cup W_2$ и $f^{-1}(a) \cap (\{x_i'\} \cup W_2) \subset (W_3 \cup (W_1 \cap f^{-1}(a))) \cap (\{x_i'\} \cup W_2) = \Lambda$.

Построим теперь пример факторного трехкратного отображения 0-мерного пространства X на 3-мерное метрическое пространство Y.

Пусть Y — некоторое метрическое 3-мерное пространство (например, куб). Тогда $Y = A \cup B \cup C \cup D$, где $\dim A = \dim B = \dim C = \dim D = 0$ и множества A, B, C и D попарно не пересекаются. Введем на множестве Y две топологии τ_1 и τ_2, объявив в первом случае открытыми точки из $Y \setminus (A \cup B)$, а во втором — точки из $Y \setminus (C \cup D)$. Легко видеть, что в обоих случаях получаются одномерные нормальные пространства ([5]).

Рассмотрим пространство (Y, τ_1). Так как оно одномерно, в этом пространстве существует σ-локально конечная система открытых множеств $\gamma = \{U_\alpha^i : i \in N,\ \alpha \in M\}$, границы элементов которой не пересекают множество A, не пересекаются между собой, кратность покрытия $\gamma^i = \{U_\alpha^i : \alpha \in M\}$ не превосходит двух для каждого i. Более того, мы требуем, чтобы было: 1) если $[U_\alpha^i \cap U_\beta^i] \cap [U_{\alpha'}^i \cap U_{\beta'}^i] \neq \Lambda$, то $U_{\alpha'}^i \cap U_{\beta'}^i = U_\alpha^i \cup U_\beta^i$, 2) для каждого $x \in A \cup B$ совокупность $\{U_\alpha^i : x \in U_\alpha^i\}$ составляет базу топологии τ_1 в точке x (из определения видно, что база исходной топологии в точке x является в то же время и базой топологии τ_1 в той же точке).

Построим теперь по индукции последовательность пространств

$$\ldots \to X_n \xrightarrow{\pi_{n-1}^{n}} X_{n-1} \to \ldots \to X_1 \xrightarrow{\pi_0^{1}} X_0 = (Y, \tau_1),$$

где X_n — нормальное пространство и π_{n-1}^n — факторное двукратное отображение для каждого n.

П о с т р о е н и е. Рассмотрим первое покрытие $\gamma^1 = \{U_\alpha^1 : \alpha \in M\}$ и в качестве X_1 возьмем свободную сумму Z и $[Z_2]$, где Z_i — совокупность точек из X, кратность покрытия γ^1 в которых равна i. Из построения видно, что X_1 распадается в дискретную сумму элементов вида $U_\alpha^1 \setminus (\bigcup_{\beta \neq \alpha} U_\beta^1)$ и $[U_\alpha^1 \cap U_\beta^1]$. Совокупность этих элементов обозначим через γ_1. Легко заметить, что естественное факторное отображение π_0^1, ограниченное на любом $V \in \gamma_1$, является вложением. Так как $\pi_0^1(V)$ — замкнутое в X_0 множество и семейство γ^1 локально конечно, то π_0^1 — замкнутое отображение. Проделаем эту операцию для каждого $V \in \gamma_1$, рассматривая семейство $(\pi_0^1)^{-1}(V) \cap \{(\pi_0^1)^{-1}(U_\alpha^2): \alpha \in M\}$ вместо γ^1. В результате мы получаем пространство X_2, семейство γ_2 и факторное двукратное отображение π_1^2 и т. д.

Очевидно, что X_n — нормальное пространство для каждого n. Пусть теперь $X^1 = \underleftarrow{\lim} (X_n, \pi_{n-1}^n)$ и f_n — сквозное отображение пространства X^1 на пространство X_n. В ([3]) доказано, что в указанных предпосылках X^1 — вполне регулярное пространство и семейство $\{f_i^{-1}\gamma_i\} \cup f_0^{-1}(C \cup D)$ составляет базу этого пространства. Заметим, кроме того, что на множестве $f_0^{-1}(A \cup B)$ семейство $\{f_i^{-1}\gamma_i\}$ высекает базу.

Из этого замечания следует, что если $x \in X_n$ — точка такая, что $|f_n^{+1}(x)| = 1$, и $\{\Gamma_i\}$ — база в точке x, то $\{f_n^{-1}(\Gamma_i)\}$ — база в точке $f_n^{-1}(x)$ пространства X^1.

Из выбора системы γ следует, что $|f_0^{-1}(x)| \leqslant 2$ для каждого $x \in X_0$ и $\{x: x \in X_0, \ |f_0^{-1}(x)| = 2\} \subset B$.

Можно легко показать, что отображение f_0 факторно и $\dim X^1 = 0$.

Точно таким же способом построим пространство X^2 и факторное отображение $g_0: X^2 \to (Y, \tau_2)$.

Обозначим $X^1 \cup X^2$ через X и построим отображение F следующим образом:

$$F(x) = \begin{cases} T \circ f_0(x), & \text{если} \quad x \in X^1, \\ T \circ g_0(x), & \text{если} \quad x \in X^2, \end{cases}$$

где $T: (Y, \tau_1) \cup (Y, \tau_2) \to Y$ — естественное отображение, соответствующее операции пересечения топологий. Очевидно, что F — факторное отображение. Так как $\{x: |f_0^{-1}x| = 2\} \subset B$, а $\{x: |g_0^{-1}x| = 2\} \subset C \cup D$ и $B \cap (C \cup D) = \Lambda$, отображение F трехкратно.

Из всего сказанно выше следует, что любое $(2n-1)$-мерное метрическое пространство можно представить как $(n+1)$-кратный факторный образ 0-мерного нормального пространства.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 IV 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Архангельский, Тр. Московск. матем. общ., 15 (1966). [2] А. В. Архангельский, ДАН, 155, № 3 (1964). [3] R. Engelking, Outline of General Topology, Amsterdam (1968). [4] А. Зарелуа, Матем. сборн., 60, № 1 (1963). [5] В. П. Золотарев, ДАН, 195, № 3 (1970).