

Член-корреспондент АН СССР В. М. ИЕВЛЕВ

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПУЛЬСИРУЮЩИХ ВЕЛИЧИН В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Для несжимаемой жидкости А. С. Мониным ⁽¹⁾ были получены уравнения (незамкнутые) для распределения вероятностей скоростей в конечных группах точек турбулентного потока; в ⁽²⁾ был предложен метод приближенного замыкания этих уравнений. Целью настоящей статьи является получение в общей форме аналогичных результатов для других, более сложных, случаев.

1. Уравнения, описывающие течение какой-либо сплошной среды, могут быть в большинстве случаев записаны в следующей форме:

$$\partial u_i / \partial t + u_k \partial u_i / \partial x_k = F_i, \quad i = 1, 2, 3; \quad (1)$$

$$\partial \rho / \partial t + u_k \partial \rho / \partial x_k = -\rho \partial u_k / \partial x_k; \quad (2)$$

$$\partial h_{(m)} / \partial t + u_k \partial h_{(m)} / \partial x_k = \Phi_{(m)}, \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Здесь x_k — декартовы координаты, u_k — компоненты скорости $\mathbf{u}$, ρ — плотность среды; символом $h_{(m)}$ обозначены все другие независимые параметры, определяющие состояние и движение среды (например, температура, концентрация какого-либо вещества и др.).

2. Обозначим f_n плотность вероятности различных значений случайных величин $\mathbf{u}$, ρ и $h_{(m)}$ в произвольных n точках потока в один и тот же момент времени t . Введем характеристическую функцию φ_n :

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \left\langle \exp \left\{ i \sum_{a=1}^n \left[\kappa_k^{(a)} u_k^{(a)} + g^{(a)} \rho^{(a)} + \sum_{q=1}^N \beta_{(q)}^{(a)} h_{(q)}^{(a)} \right] \right\} \right\rangle = \\ &= \int_{A_n} \exp \left\{ i \sum_{a=1}^n \left[\kappa_k^{(a)} u_k^{(a)} + g^{(a)} \rho^{(a)} + \sum_{q=1}^N \beta_{(q)}^{(a)} h_{(q)}^{(a)} \right] \right\} f_n dA_n; \end{aligned} \quad (4)$$

здесь угловые скобки — знак осреднения; индекс a отмечает номера точек; A_n — совокупность величин $\mathbf{u}^{(a)}$, $\rho^{(a)}$ и $h_{(m)}^{(a)}$ для всех точек; интегрирование производится по всей области возможного изменения величин A_n .

Производные от φ_n по времени и по координатам точек могут вычисляться двумя способами: путем дифференцирования f_n под знаком интеграла в (4) или путем вычисления производной от стоящей в угловых скобках в (4) величины. Второй способ основывается на определении φ_n как среднего от записанной в угловых скобках величины по ансамблю большого числа реализаций статистически одинаковых турбулентных потоков. Согласно этому способу получается

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} &= i \sum_{\gamma=1}^n \left\langle \left[\kappa_i^{(\gamma)} \frac{\partial u_i^{(\gamma)}}{\partial t} + g^{(\gamma)} \frac{\partial \rho^{(\gamma)}}{\partial t} + \sum_{m=1}^N \beta_{(m)}^{(\gamma)} \frac{\partial h_{(m)}^{(\gamma)}}{\partial t} \right] \right\rangle \times \\ &\times \exp \left\{ i \sum_{a=1}^n \left[\kappa_k^{(a)} u_k^{(a)} + g^{(a)} \rho^{(a)} + \sum_{q=1}^N \beta_{(q)}^{(a)} h_{(q)}^{(a)} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как эволюция во времени каждой конкретной реализации потока подчинена уравнениям (1)–(3), то производные по времени от $u_i^{(\gamma)}$, $\rho^{(\gamma)}$ и $h_{(m)}^{(\gamma)}$ в (5) можно заменить выражениями для них из (1)–(3). Производя затем несложные преобразования с использованием выражения для $\partial \varphi_n / \partial x_k^{(\gamma)}$ и применяя к получающемуся уравнению для $\partial \varphi_n / \partial t$ преобразование, обратное преобразованию Фурье (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n}{\partial t} = \sum_{\gamma=1}^n \left\{ -u_k^{(\gamma)} \frac{\partial f_n}{\partial x_k^{(\gamma)}} + f_n \left\langle \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^{(\gamma)} \right\rangle_{A_n} - \frac{\partial}{\partial u_i^{(\gamma)}} [f_n \langle F_i^{(\gamma)} \rangle_{A_n}] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \rho^{(\gamma)}} [f_n \langle \rho^{(\gamma)} \rangle_{A_n}] - \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial h_{(m)}^{(\gamma)}} [f_n \langle h_{(m)}^{(\gamma)} \rangle_{A_n}] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Это и есть искомое уравнение для плотности вероятности f_n .

Угловые скобки с индексом A_n в (6) обозначают средние значения стоящих в этих скобках величин при заданных аргументах A_n , т. е. при заданных u , ρ и всех $h_{(m)}$ в выбранных точках. Выражения для этих средних величин включают в себя f_{n+1} или даже функции распределения более высокого порядка. Таким образом, уравнение (6) для f_n не является замкнутым.

3. Плотность вероятности f_n должна удовлетворять следующим физически очевидным (но математически не тривиальным) условиям:

$$\begin{aligned} f_n \geq 0, \quad \int_{A_n} f_n dA_n = 1, \quad f_n(\dots; x^{(\alpha)}, a^{(\alpha)}; \dots; x^{(\gamma)}, a^{(\gamma)}; \dots) = \\ = f_n(\dots; x^{(\gamma)}, a^{(\gamma)}; \dots; x^{(\alpha)}, a^{(\alpha)}; \dots), \quad (7) \\ \int_{a^{(\alpha)}} f_n da^{(\alpha)} = f_{n-1}(\dots; x^{(\alpha-1)}, a^{(\alpha-1)}; x^{(\alpha+1)}, a^{(\alpha+1)}; \dots); \end{aligned}$$

здесь символом $a^{(\alpha)}$ обозначена совокупность аргументов $u^{(\alpha)}$, $\rho^{(\alpha)}$, $h_{(1)}^{(\alpha)}, \dots, h_{(N)}^{(\alpha)}$.

Согласно последнему условию, при интегрировании f_n по всей области возможного изменения аргументов $a^{(\alpha)}$ получается функция f_{n-1} , не зависящая не только от $a^{(\alpha)}$, но и от координат $\mathbf{x}^{(\alpha)}$ точки a .

Если аргументы $a^{(\alpha)}$ удовлетворяют некоторым дифференциальным уравнениям, не содержащим производных по времени (что в ряде случаев имеет место), то на функцию f_n накладываются дополнительные условия. В частности, для магнитногидродинамических потоков жидкости с постоянной плотностью из уравнений $\text{div } \mathbf{u} = 0$ и $\text{div } \mathbf{H} = 0$ получается (ср. (1))

$$\frac{\partial}{\partial x_k^{(\alpha)}} \int_{a^{(\alpha)}} u_k^{(\alpha)} f_n da^{(\alpha)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_k^{(\alpha)}} \int_{a^{(\alpha)}} H_k^{(\alpha)} f_n da^{(\alpha)} = 0, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

4. Приведем пример конкретных выражений для отдельных членов в правой части уравнения (6).

При магнитногидродинамическом течении жидкости с постоянными свойствами члены с $\partial u_k / \partial x_k$ в (6) отсутствуют. Формулу для $\langle F_i^{(\gamma)} \rangle_{A_n}$ можно получить, используя обычное выражение для правой части F_i уравнения количества движения (1) (см., например, (3)):

$$\langle F_i^{(\gamma)} \rangle_{A_n} = \left\langle -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_0}{\partial x_i} \right)^{(\gamma)} + \frac{H_k^{(\gamma)}}{4\pi\rho} \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_k} \right)^{(\gamma)} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right)^{(\gamma)} \right\rangle_{A_n}. \quad (9)$$

Величина $p_0 = p + H^2 / (8\pi)$ (где p — давление) определяется распределением $\mathbf{u}$ и $\mathbf{H}$. Подставляя, например, в (9) выражение для p_0 для частного случая неограниченного в пространстве потока, получим

$$\langle F_i^{(\gamma)} \rangle_{A_n} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i^{(\gamma)}} \int_{\mathbf{x}^{(n+1)}} \frac{1}{r_{\gamma, n+1}} \frac{\partial^2}{\partial x_m^{(n+1)} \partial x_k^{(n+1)}} \left[\langle u_m^{(n+1)} u_k^{(n+1)} \rangle_{A_n} - \right.$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho} \langle H_m^{(n+1)} H_k^{(n+1)} \rangle_{A_n} \Big] dx^{(n+1)} + \\ + \lim_{x^{(n+1)} \rightarrow x^{(\gamma)}} \left\{ \frac{\langle \gamma \rangle}{4\pi\rho} \frac{\partial \langle H_i^{(n+1)} \rangle_{A_n}}{\partial x_k^{(n+1)}} + v \frac{\partial^2 \langle u_i^{(n+1)} \rangle_{A_n}}{\partial x_k^{(n+1)} \partial x_k^{(n+1)}} \right\};$$

здесь $r_{\gamma, n+1}$ — расстояние от точки γ до точки $n+1$, по координатам которой производится интегрирование. Величины $\langle u_i^{(n+1)} \rangle_{A_n}$, $\langle H_i^{(n+1)} \rangle_{A_n}$, $\langle u_m^{(n+1)} u_k^{(n+1)} \rangle_{A_n}$ и $\langle H_m^{(n+1)} H_k^{(n+1)} \rangle_{A_n}$ выражаются через f_{n+1} с помощью общего правила:

$$\langle \psi(a^{(n+1)}) \rangle_{A_n} = \frac{1}{f_n} \int_{a^{(n+1)}} \psi(a^{(n+1)}) f_{n+1} da^{(n+1)}, \quad (10)$$

где ψ — любая функция от аргументов $a^{(n+1)}$.

В последнем члене в (6) в рассматриваемом примере $h_{(m)}$ — это компоненты вектора $\mathbf{H}$, а $\Phi_{(m)}$ — правая часть уравнения магнитной индукции вида (3) (см., например, (3)). Этот член имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial H_i^{(\gamma)}} \left\{ f_n \lim_{x^{(n+1)} \rightarrow x^{(\gamma)}} \left[H_k^{(\gamma)} \frac{\partial \langle u_i^{(n+1)} \rangle_{A_n}}{\partial x_k^{(n+1)}} + v_M \frac{\partial^2 \langle H_i^{(n+1)} \rangle_{A_n}}{\partial x_k^{(n+1)} \partial x_k^{(n+1)}} \right] \right\};$$

здесь v_M — коэффициент «магнитной вязкости».

Аналогичным образом получаются выражения для членов в (6) и для других случаев. Для некоторых задач приходится использовать функции распределения более высокого порядка, чем f_{n+1} . Однако во многих случаях выражения для правой части (6) можно упростить путем замены отдельных величин суммой их средних (или условных средних) значений и добавок к ним и пренебрежения затем малыми членами; получающиеся упрощенные выражения оказываются зависящими только от f_{n+1} .

5. Метод приближенного замыкания уравнения (6), предложенный в (2) для несжимаемой жидкости, может быть обобщен на все случаи, для которых правая часть (6) выражается (точно или приближенно) через f_{n+1} .

Рассмотрим вначале для конкретности пример течения электропроводной жидкости с постоянной плотностью. Обозначим $Q^{(\gamma)}$ любую из величин, стоящую в угловых скобках в правой части (6). Используя справедливые для рассматриваемого случая условия (7) и (8) для f_n , можно установить, что величины $\langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n}$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\int_{a^{(\alpha)}} \langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n} f_n da^{(\alpha)} = \langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_{n-1}^{(\alpha)}} \int_{a^{(\alpha)}} f_n da^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, n; \quad (11) \\ \frac{\partial}{\partial x_k^{(\alpha)}} \int_{a^{(\alpha)}} u_k^{(\alpha)} \langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n} f_n da^{(\alpha)} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_k^{(\alpha)}} \int_{a^{(\alpha)}} H_k^{(\alpha)} \langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n} f_n da^{(\alpha)} = 0; \\ \alpha \neq \gamma; \quad (12)$$

здесь $A_{n-1}^{(\alpha)}$ — совокупность аргументов $a^{(\beta)}$ для всех точек, кроме точки α .

При удалении любой точки $\alpha \neq \gamma$ на бесконечность или при слиянии этой точки с другой получается

$$\langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n} \rightarrow \langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_{(n-1)}^{(\alpha)}}. \quad (13)$$

Правые части в (11) и (13) выражаются через n -точечную плотность вероятности f_n .

Соотношения (11) и (12) являются необходимым и достаточным условием того, чтобы определяемая по (6) функция f_n удовлетворяла условиям (7) и (8) в любой момент времени, если она удовлетворяет им при $t=0$. В связи с этим естественно потребовать, чтобы приближенные вы-

ражения для $\langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n}$, замыкающие уравнение (6), также удовлетворяли соотношениям (11) и (12). Если ограничить возможный вид функции, аппроксимирующей $\langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n}$, то ее можно таким образом полностью определить. Наиболее общий вид приближенного выражения для $\langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n}$, полностью определяемого уравнениями (11), (12) и граничными условиями (13), таков:

$$\langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n} \approx \sum_{\alpha=1}^n F_{(\alpha)} + \sum_{\alpha \neq \gamma} \left[u_k^{(\alpha)} \frac{\partial \psi_{(\alpha)}}{\partial x_k^{(\alpha)}} + H_k^{(\alpha)} \frac{\partial \lambda_{(\alpha)}}{\partial x_k^{(\alpha)}} \right]; \quad (14)$$

здесь $F_{(\alpha)}$, $\psi_{(\alpha)}$ и $\lambda_{(\alpha)}$ — произвольные функции от $A_{n-1}^{(x)}$, координат всех n точек и времени.

Уравнения (11) и (12) для различных величин $\langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n}$ после подстановки в них (14) образуют совместно с (6) замкнутую систему уравнений.

Описанный метод позволяет получить наиболее точную, в некотором смысле, аппроксимацию для $\langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n}$: уравнения (11), (12) и граничные условия (13) для функции $\langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n}$ вида (14) являются условиями минимума интеграла

$$J^{(\gamma)} = \int_{R_{n-1}^{(\gamma)}} \int_{A_n} [\langle Q^{(\gamma)} \rangle'_{A_n} - \langle Q^{(\gamma)} \rangle_n]^2 f_n dA_n dR_{n-1}^{(\gamma)}; \quad (15)$$

здесь символ $R_{n-1}^{(\gamma)}$ обозначает интегрирование по координатам всех точек, кроме точки γ (по всей области течения жидкости); штрихом отмечено точное значение $\langle Q^{(\gamma)} \rangle'_{A_n}$.

Для среды с переменной плотностью не выполняется первое из условий (8), поэтому при определении $\langle Q^{(\gamma)} \rangle_{A_n}$ должны быть опущены первое из уравнений (12) и член с $\psi_{(\alpha)}$ в правой части (14). Для неэлектропроводной среды должны быть опущены второе уравнение в (12) и последний член в (14).

Замыкание уравнений для f_n описанным методом возможно только при $n \geq 2$. Если (из-за сложности задачи) рассматриваются уравнения лишь для $n = 1$, то отдельные члены в правой части (6) могут определяться только тем или иным полуэмпирическим способом.

6. Исползованный при выводе уравнения (6) метод применим для получения уравнений для плотности вероятности f_n различных значений u , ρ и параметров $h_{(m)}$ в n точках в различные (для разных точек) моменты времени. Вводя по-прежнему характеристическую функцию (4), дифференцируя ее по времени t_γ (при котором рассматриваются параметры $a^{(\gamma)}$ в точке γ) и применяя, после несложных вычислений, к найденному уравнению преобразование, обратное преобразованию Фурье (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_n}{\partial t_\gamma} = & -u_k^{(\gamma)} \frac{\partial f_n}{\partial x_k^{(\gamma)}} + f_n \left\langle \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^{(\gamma)} \right\rangle_{A_n} - \frac{\partial}{\partial u_i^{(\gamma)}} [f_n \langle F_i^{(\gamma)} \rangle_{A_n}^*] + \\ & + \frac{\partial}{\partial \rho^{(\gamma)}} [f_n \rho^{(\gamma)} \left\langle \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^{(\gamma)} \right\rangle_{A_n}] - \sum_{m=1}^N \frac{\partial}{\partial h_{(m)}^{(\gamma)}} [f_n \langle \Phi_{(m)}^{(\gamma)} \rangle_{A_n}], \quad \gamma = 1, 2, \dots, n; \end{aligned} \quad (16)$$

здесь угловые скобки с индексом A_n — знак осреднения при заданных величинах $a^{(1)}$ в момент t_1 , $a^{(2)}$ в момент t_2 , ..., $a^{(n)}$ в момент t_n .

Дополнительные условия для функции f_n и способы приближенного замыкания уравнений (16) в основном аналогичны изложенным выше.

Поступило
7 IX 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. С. Мопин, ДАН, 177, № 5 (1967). ² В. М. Иевлев, Мех. жидкости и газа, № 1 (1970). ³ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., 1957.