Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 5

УДК 513.881 МАТЕМАТИКА

А. И. КОШЕЛЕВ

О СИЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ В ЦЕЛОМ ОДНОГО ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 X 1971)

На сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx} F(x, y, y') - f(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

с граничными условиями

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{2}$$

Относительно функций F и f предполагается, что они непрерывны по всем аргументам, F — два раза, а f — один раз непрерывно дифференцируемы по y и y'. Кроме того, предположим, что производные функций F, F_x' и f y и y' ограничены при всех значениях y и y'.

Для решения задачи (1), (2) автором был предложен следующий итерационный процесс:

$$y''_{n+1} = y''_n - \varepsilon L(y_n), \tag{3}$$

$$y_n(0) = y_n(1) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

В качестве начального приближения может быть взята любая достаточно гладкая функция $y_0(x)$.

Примем также, что для любой $y \in C^{(1)}$ выполняются следующие неравенства:

$$\frac{\nu(\xi_1^2+\xi_2^2)}{(1+y^2+y'^2)^{1/2(1-\gamma)}} \geqslant \frac{\partial F}{\partial y'}\xi_1^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'}\right)\xi_1\xi_2 + \frac{\partial f}{\partial y}\xi_2^2 \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\mu(\xi_1^2+\xi_2^2)}{(1+y^2+y'^2)^{1/2(1-\gamma)}}, \tag{I}$$

где ξ_1, ξ_2 — произвольные вещественные числа, γ, μ и ν — положительные постоянные и $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$;

$$|F(x, y, y'| < K(1+y^2+y'^2)^{1/2\gamma}; \quad |F_y'| \leqslant K(1+y^2+y'^2)^{1/2(\gamma-1)} \tag{II}$$

$$|F_x' - f| < K(1+y^2+y'^2)^{1/4(2s+\gamma-1)}, \quad 0 < s < 1/2(1+\gamma); \tag{III}$$

$$|f_{y'}'| < K(1+y^2+y'^2)^{1/4(2s+\gamma-3)}; \tag{IV}$$

$$|f_y'| < K(1+y^2+y'^2)^{1/4(2s+\gamma-3)}. \tag{V}$$

Для любой $z \in C^{(1)}$ справедливо неравенство

$$[F(x, y, y') - F(x, z, z')](y'-z') + [f(x, y, y') - f(x, z, z')](y-z) \geqslant$$
$$\geqslant \rho\{[F(x, y, y') - F(x, z, z')]^2 + [f(x, y, y') - f(x, z, z')]^2\}. \tag{VI}$$

В неравенствах (II)—(VI) K, s и ρ — положительные постоянные.

В статье [1] было показано, что при выполнении этих условий процесс (3), (4) при достаточно малом $\varepsilon > 0$ сходится в $W_2^{(1)}$ к решению задачи

(1), (2), начиная с произвольной $y_0 \in \overset{\circ}{C}{}^{(2)}$, и имеет место неравенство

$$\|y_n - y_{n-1}\|_{W_2^{(1)}} \leqslant B(1-\delta/2^\tau)^{1/2} \ldots (1-\delta/n^\tau)^{1/2}, \tag{5}$$

где B и δ — положительные постоянные и

$$\tau = {}^1/_2(1-\gamma)/(1-s) < 1.$$

Правая часть неравенства (5) при $n \to +\infty$ имеет порядок $O(n^{-\sigma})$, где σ — любое положительное число.

В настоящей заметке показывается, что процесс (3), (4) при тех же условиях сходится в $C^{(2)}$, а при выполнении больших условий гладкости на функции F, f и $y_0(x)$ — в более сильных нормах. Доказательство основано на следующем утверждении.

Лемма. *Если выполнены все перечисленные условия, то для последовательных приближений $y_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$, процесса* (3), (4) *справедливо неравенство*

$$\int_0^1 (y''_{n+1} - y''_n)^2\, dx \leqslant \int_0^1 \left[1 - \frac{\varepsilon_1}{(1+y_n^2+y_n'^2)^{1/2(1-\gamma)}}\right](y''_n - y''_{n-1})^2\, dx + $$
$$+ Cn^{1/2(3-\gamma)/(1-s)}(1-\delta/2^\tau)^{1/2} \ldots (1-\delta/n^\tau)^{1/2}, \tag{6}$$

где C и ε_1 — положительные постоянные и ε_1 достаточно мало.

С помощью неравенства (6) и доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. *Итерационный процесс* (3), (4) *сходится к решению задачи* (1), (2) *в $C^{(2)}$, начиная с произвольной $y_0 \in \overset{\circ}{C}{}^{(2)}$, причем скорость сходимости определяется неравенством*

$$\max_{[0,1]} |y''_{n+1} - y''_n| < Cn^\alpha (1-t/2^\tau)^{1/2} \ldots (1-t/n^\tau)^{1/2},$$

где C, t и α — положительные постоянные и

$$\alpha = {}^1/_4(9-\gamma-6s)/(1-s).$$

Теорема 2. *Если, кроме выше перечисленных условий, функции F и f имеют ограниченные производные k-го порядка $(k > 2)$, которые равномерно ограничены, когда y и y' лежат в любой конечной области, то процесс* (3), (4) *сходится в $C^{(k)}$, начиная с произвольной $y_0 \in \overset{\circ}{C}{}^{(k)}$, и имеет место неравенство*

$$\|y_{n+1} - y_n\|_{C^{(k)}} \leqslant Cn^{\alpha+k-2}(1-t/2^\tau)^{1/2} \ldots (1-t/n^\tau)^{1/2},$$

где C — положительная постоянная.

Поскольку последнее неравенство, очевидно, приводит к ограниченности в совокупности $\{y_n\}$ в $C^{(k)}$, то при достаточно большом k может быть доказана сходимость некоторых разностных вариантов процесса (3), (4).

Ленинградский институт
текстильной и легкой промышленности
им. С. М. Кирова

Поступило
23 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. М. Михайлова-Губенко, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 9 (1971).