

В. И. МАЛЫХИН

О ТЕСНОТЕ И ЧИСЛЕ СУСЛИНА В $\text{exp} X$ И В ПРОИЗВЕДЕНИИ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 27 IX 1971)

В работе доказываются несколько теорем о связи кардинальных инвариантов пространства $\text{exp} X$ со свойствами пространства X . Напомним определения и обозначения.

1) $\text{exp} X$ — пространство замкнутых подмножеств топологического пространства X с топологией Висториса. Базовую окрестность точки (F) в $\text{exp} X$ будем обозначать $(V_1, \dots, V_n)$, где $\bigcup_{i=1}^n V_i \supset F$ и $V_i \cap F = \emptyset$ для всякого $i = 1, \dots, n$.

2) $t(X)$ — теснота пространства X ⁽¹⁾ определяется так: $t(X) \leq m$, если из того, что $x \in [A]$ следует, что существует $B \subset A$, $|B| \leq m$ и $x \in [B]$.

3) $c(X)$ — число Суслина пространства X .

4) $cc(X) = \sup\{c(Y) : Y \subset X\}$ — протяженность пространства X .

I. Теорема 1. Если $t(\text{exp} X) \leq \aleph_0$, то X сепарабельно.

Предположим противное и пусть Y плотно в X . По предположению $|Y| > \aleph_0$. Пусть Δ — семейство всех конечных подмножеств множества Y . Ясно, что $|\Delta| = |Y|$ и $(X) \in [\Delta]$, где $\Delta = \{(Z) : Z \in \Delta\}$. Действительно, пусть $(V_1, \dots, V_n)$ — произвольная окрестность точки (X) в $\text{exp} X$. В каждом V_i выберем точку $x_i \in Y$. Множество $A = (x_1, \dots, x_n)$ замкнуто в X и $A \in \Delta$, а $(A) \in (V_1, \dots, V_n)$. Тем не менее, если $B \subset \Delta$ и $|B| \leq \aleph_0$, то $(X) \notin [B]$, ибо X несепарабельно.

Следствие 1. Если $t(\text{exp} X) \leq \aleph_0$, то X наследственно сепарабельно.

Пусть F замкнуто в X , тогда $\text{exp} F \subset \text{exp} X$ и $t(\text{exp} F) \leq \aleph_0$ и потому по теореме 1 F сепарабельно. Кроме того, $t(X) \leq t(\text{exp} X) \leq \aleph_0$ и потому, как показано в (1), X наследственно сепарабельно.

Теорема 2. Пусть X нормально и $t(\text{exp} X) < \aleph_0$.

Тогда в $\text{exp} X$ выполнена 1-я аксиома счетности.

Наметим схему доказательства. Используя нормальность X и счетную тесноту в $\text{exp} X$, можно показать, что в X всякое замкнутое множество имеет счетную базу фильтра своих окрестностей. Из теоремы 1 получим, что X наследственно сепарабельно. После этого уже можно показать, что в $\text{exp} X$ выполнена 1 аксиома счетности.

Следствие 2. Пусть X регулярно и $t(\text{exp} X) \leq \aleph_0$.

Тогда в X выполнена 1 аксиома счетности.

Не представляет труда распространить теоремы 1 и 2 и следствия из них на случай любых кардинальных чисел.

II. Лемма 1. Пусть N_τ — дискретное пространство мощности τ .

Тогда $cc(\text{exp} N_\tau) > \tau$.

Действительно, известно ⁽²⁾, что существует семейство $\{S_t : t \in T\}$ такое, что $|T| > \tau$, $S_t \subset N_\tau$, $|S_t| = \tau$ и для всяких t_1 и t_2 из T $|S_{t_1} \cap S_{t_2}| < \tau$. Легко видеть поэтому, что множество $A = \{(S_t) : t \in T\}$ дискретно в индуцированной топологии.

Лемма 2. Пусть в X есть вполне упорядоченная строго убывающая (строго возрастающая) по включению последовательность замкнутых множеств длины τ .

Тогда $cc(\exp X) \geq \tau$.

Доказательство можно извлечь из конструкции, приведенной в (3).

Следствие 3. Если $cc(\exp X) \leq \tau$, то всякое замкнутое множество $F \subset X$ имеет плотность, не большую, чем τ .

Очевидно, достаточно показать, что $s(X) \leq \tau$. Предположим обратное и построим строго возрастающую последовательность замкнутых множеств $\{F_\alpha : \alpha < \tau^+\}$. Пусть для какого-то $\alpha < \tau^+$ все множества F_β , где $\beta < \alpha$, уже построены и $s(F_\beta) \leq \tau$ и $F_\eta \subset F_\xi$ для $\xi < \eta < \alpha$, причем включение строгое. Определим $F_\alpha = [\bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta] \cup \{x_\alpha\}$, где $x_\alpha \in X \setminus [\bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta]$. Заметим, что $s([\bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta]) \leq \tau$ и поэтому $X \setminus [\bigcup_{\beta < \alpha} F_\beta] = \emptyset$, т. е. такой x_α найдется.

Итак, все индуктивные предположения выполнены, и мы можем вести процесс по всем $\alpha < \tau^+$. Отсюда по лемме 2 заключаем, что $A = \{(F_\beta) : \beta < \tau^+\}$ дискретно в индуцированной топологии и потому $cc(\exp X) \geq \tau^+ > \tau$.

Следствие 4. Если $cc(\exp X) \leq \aleph_0$, то X — бикомпакт.

Замечание 1. Известно (4), что если пространство $\exp X$ метризуемо, то X — бикомпакт и тогда $cc(\exp X) \leq \aleph_0$. Спрашивается верно ли, что $cc(\exp X) \leq \aleph_0$ влечет метризуемость X ? Ответ на этот вопрос неизвестен.

III. Теорема 3. $c(\exp X) \leq \exp(c(X))$.

Предположим противное. Пусть в $\exp X$ существует дизъюнктивная система $\Delta = \{R_\alpha : \alpha \in A\}$ открытых в $\exp X$ множеств и $|A| = m = (\exp(c(X)))^+$. Возьмем R_α в виде $R_\alpha = (u_{1(\alpha)}^a, \dots, u_{s(\alpha)}^a)$, где $s(\alpha) \leq \aleph_0$, и отнесем R_α к классу Δ_n , если $s(\alpha) = n$. Ясно, что существует натуральное n_0 , для которого $|\Delta_{n_0}| = m$. Определим теперь подмножество $\exp X$

$$J_n(X) = \{(F) : F \subset X \text{ и } |F| \leq n_0\}.$$

Если рассмотреть отображение $f_n: X^n \rightarrow J_n(X)$, определенное как $f_n(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$, то оно, как указано в (5), является непрерывным и на. Система Δ_{n_0} высекает на $J_n(X)$ дизъюнктивную систему непустых открытых в $J_n(X)$ множеств. Следовательно, ввиду непрерывности f_n , в X^n существует дизъюнктивная система открытых множеств мощности $m > \exp(c(X))$. По теореме из (6) этого не может быть.

В связи с теоремой 3 возникает задача построения примера пространства X , для которого было бы $c(\exp X) > c(X)$. При $c(X) = \aleph_0$ такой пример, как заметил А. В. Архангельский и некоторые другие авторы, построить невозможно в силу следующего. Существует модель $\mathcal{D}$ теории множеств, где выполняется особая аксиома Мартина (7). Для топологии важное значение имеет следствие из нее, обозначаемое ТАМ:

Если $c(X) = \aleph_0$, то из всякого несчетного семейства открытых множеств можно извлечь нечетное центрированное подсемейство.

Легко видеть, что в $\mathcal{D}$ справедливо

Утверждение. Если $c(X_1) = \aleph_0$ и $c(X_2) = \aleph_0$, то $c(X_1 \times X_2) = \aleph_0$.

Из теоремы 3 в данной модели получим тогда, что если $c(X) = \aleph_0$, то $c(\exp X) = \aleph_0$.

Замечание 2. Интересно отметить, что если $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и для всякого $A' \subset A$, где $|A'| < \aleph_0$ имеем $c(\prod_{\alpha \in A'} X_\alpha) \leq m$ и m — регулярный кардинал, то $c(X) \leq m$.

IV. Следующая задача была поставлена А. В. Архангельским. Пусть $t(X_1) \leq m$ и $t(X_2) \leq m$. Верно ли, что $t(X_1 \times X_2) \leq m$? Справедлива

Теорема 4. Если $t(X_1) \leq m$ и $t(X_2) \leq m$ и X_2 — бикомпакт, то $t(X_1 \times X_2) \leq m$.

Лемма. Пусть выполняются условия теоремы 4, $A \subset X_1 \times X_2$ и $x_1^0 \in [\pi_1 A]$ (π_i — проектирование на сомножитель X_i).

Тогда $[A] \cap \pi_1^{-1}\{x_1^0\} \neq \emptyset$.

Доказательство теоремы 4. Очевидно, можно считать, что если $(x_1^0, x_2^0) \in [A]$, то $x_2^0 \in [\pi_1 A \setminus \{x_1^0\}]$. Рассмотрим семейство Δ всех подмножеств $\pi_1 A$ со свойствами $B \in \Delta$, если $|B| \leq m$, и $x_1^0 \in [B]$. Ясно, что $\Delta \neq \emptyset$.

Определим еще семейство $\Gamma(B)$ так: $L \in \Gamma(B)$, если $|L \cap A \cap \pi_1^{-1}\{x_1\}| \leq m$ для всякого $x_1 \in B$. Очевидно, что $L \subset A$ и $|L| \leq m$ и $x_1^0 \in [\pi_1 L]$. По лемме тогда имеем, что для каждого $L \in \Gamma(B)$

$$K(L) = [L] \cap \pi_1^{-1}\{x_1^0\} \neq \emptyset.$$

Так как теснота наследуется подпространствами, то

$$(x_1^0, x_2^0) \in \left[\bigcup_{B \in \Delta} \bigcup_{L \in \Gamma(B)} K(L) \right].$$

Но $\bigcup_{B \in \Delta} \bigcup_{L \in \Gamma(B)} K(L) \subset \pi_1^{-1}\{x_1^0\}$ и потому существует множество $D \subset \bigcup_{B \in \Delta} \bigcup_{L \in \Gamma(B)} K(L)$ такое, что $|D| \leq m$ и $(x_1^0, x_2^0) \in [D]$. Для всякой точки $(x_1^0, y) \in D$ существует некоторое $K(L(y)) \in \{K(L) : L \in \Gamma(B) \text{ и } B \in \Delta\}$ и $(x_1^0, y) \in K(L(y))$.

Теперь ясно, что $(x_1^0, x_2^0) \in \left[\bigcup_{y \in \pi_2 D} L(y) \right]$ и $\left| \bigcup_{y \in \pi_2 D} L(y) \right| \leq m$.

Теорема 4 доказана.

Более общая формулировка теоремы 4 такова.

Пусть $t(X_1) \leq m$ и $t(X_2) \leq m$ и пространство X_2 таково, что для всякой точки $x_2 \in X_2$ существует окрестность $u(x_2)$, допускающая такую бикомпактификацию $\beta U(x_2)$, в которой теснота в точке x_2 осталась прежней.

Тогда $t(X_1 \times X_2) \leq m$.

Замечание 3. Если $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ и для всякого $A' \subset A$, $|A'| < \aleph_0$,

имеем $t\left(\prod_{\alpha \in A'} X_\alpha\right) \leq m$, то $t(X) = \max\{|A|, m\}$.

Доказывается проектированием на грани конечных произведений.

В заключение выражаю искреннюю благодарность проф. А. В. Архангельскому за внимание, проявленное к работе, и ценные советы.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, ДАН, 199, № 6 (1971). ² W. Sierpinski, Cardinal and Ordinal Numbers, Warszawa, 1965. ³ J. Keesling, Bull. Am. Math. Soc., 76, № 3 (1970). ⁴ E. Michael, Trans. Am. Math. Soc., 71, № 1 (1951). ⁵ М. Чобан, ДАН, 186, № 2 (1969). ⁶ Z. Herdlin, Bull. Acad. Polon. Sci., 14, № 1 (1966).