М. Н. ОГЮЗТОРЕЛИ (M. N. OĞUZTÖRELİ),
Д. И. МАНЖЕРОН (D. J. MANGERON)

К ПОСТРОЕНИЮ СИСТЕМ ПОЛИВОЛНОВЫХ ПОЛИНОМОВ (1)

(Представлено академиком И. П. Векуча 6 X 1972)

1. Интерес, проявленный к неклассическим граничным задачам ⁽¹⁻⁷⁾, впервые поставленным и частично решенным различными методами вторым из авторов сорок лет тому назад в связи с его исследованиями, посвященными «поливолновым» системам * ⁽⁸⁻¹²⁾, прототипом которых служит система

$$D_m [A(x)D_m u(x) + \lambda B(x)u(x)] + \lambda [B(x)D_m u(x) + C(x)u(x)] = 0, \quad (1,1)$$
$$u(x) |_{\text{FrR}} = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

или же ее вариационная модель

$$M [f(x)] = \min_f \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} A(x) [D_m f(x)]^2 dx, \quad f(x) |_{\text{FrR}} = 0, \quad (1,2)$$
$$H [f(x)] = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_m}^{b_m} [2B(x)f(x)D_m f(x) + C(x)f^2(x)] dx = \pm 1,$$

объясняет современный многогранный подход авторов к решению различных прикладных и теоретических задач, относящихся к поливолновым системам. Работа авторов глубоко связала их, в частности, с широко известной киргизской школой по интегро-дифференциальным уравнениям ⁽¹³⁻¹⁸⁾.

Новшество указанных прототипов поливолновых систем** состоит в том, что $D_m \equiv \partial^m / \partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_m$ — оператор полной производной первого порядка в смысле М. Пиконе ^(19, 20), $R = \{a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m\}$, $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_m$, причем FrR — граница прямоугольника m -мерного эвклидова пространства R^m .

Ниже приводится ряд систем полигармонических полиномов, включающих в себя — при соответствующем выборе постоянных, а также и коэффициента при зависимой переменной как функции от n (степени полинома) — все «классические» полиномы при $m = 1$. Полученные системы позволяют применять линейные методы к приближению полиномами дифференциальных уравнений, дают новые материалы для исследования геометрии полиномов ⁽²⁶⁾ и дополняют с новой точки зрения систематические результаты, полученные Б. А. Бондаренко в области полигармониче-

* В обширном ряде научных работ второго из авторов, в сотрудничестве с представителем киргизской школы по интегро-дифференциальным уравнениям Л. Е. Кривошейным, а затем и с первым автором, различные ими рассмотренные поливолновые системы были названы системами с операторами Пиконе ⁽²¹⁻²⁴⁾.

** Как было уже указано в заметках авторов ⁽²³⁾, поливолновые уравнения были названы некоторыми советскими, итальянскими, французскими, канадскими, американскими, и, конечно, румынскими исследователями уравнениями Манжерона.

ских полиномов (27) и Д. Г. Гребенюком в области полиномов наилучшего приближения по многим переменным (28).

2. Рассмотрим поливолновые уравнения

$$\begin{aligned} & (a_m \theta_m^2 + b_m \theta_m + c_m) \frac{\partial^{2m} u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \dots \partial x_{m-1}^2 \partial x_m^2} + \sum_{l=1}^m (d_{l,m} \theta_m + f_{l,m}) \times \\ & \times \sum_{i_1, i_2, \dots, i_l}^{1, m} x_1 x_2 \dots x_{i_1-1} x_{i_1+1} \dots x_{i_2-1} x_{i_2+1} \dots x_{i_l-1} x_{i_l+1} \dots x_m \times \\ & \times \frac{\partial^{2m-l} u(x_1, x_2, \dots, x_m)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2 \dots \partial x_{i_1-1}^2 \partial x_{i_1} \partial x_{i_1+1}^2 \dots \partial x_{i_2-1}^2 \partial x_{i_2} \partial x_{i_2+1}^2 \dots \partial x_{i_l-1}^2 \partial x_{i_l} \partial x_{i_l+1}^2 \dots \partial x_m^2} + \\ & + \lambda_{n,m} u(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \end{aligned} \quad (2,1)$$

$$\theta_m = \prod_{i=1}^m x_i, \quad \lambda_{n,m} = -n^m (a_m (n-1)^m + \sum_{l=1}^m C_m^l (n-1)^{m-l} d_{l,m}),$$

где $a_m, b_m, c_m, d_{l,m}, f_{l,m}$ ($l = 1, 2, \dots, m$) — постоянные, не зависящие от n , а также и соответствующие (2,1) обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{M}[u(t)] \equiv & \left\{ (a_m t^2 + b_m t + c_m) \mathcal{O}_m^2 + \right. \\ & \left. + \sum_l^{1, m} C_m^l (d_{l,m} t + f_{l,m}) \mathcal{O}_{m-l}^* \mathcal{O}_m + \lambda_{n,m} \right\} u(t) = 0, \end{aligned} \quad (2,2)$$

где обыкновенные дифференциальные операторы $\mathcal{O}_g, \mathcal{O}_{m-g}^*$ определяются выражениями

$$\mathcal{O}_g \equiv \sum_k^{0, g-1} \left(\sum_{k_0}^{1, k+1} k_0 + \sum_{k_1, k_2}^{2, k+1} k_1 k_2 + \dots + \sum_{k_1, k_2, \dots, k_{g-k-1}}^{2, k+1} k_1 k_2 \dots k_{g-k-1} \right) t^k \frac{d^{k+1} u(t)}{dt^{k+1}}, \quad (2,3)$$

$$\mathcal{O}_{m-g}^* = t \mathcal{O}, \quad \mathcal{O}^* \equiv 1, \quad g = 1, 2, \dots, m.$$

Они допускают при $\lambda_{n,m} = -n^m (a_m (n-1)^m + \sum_l^{1, m} C_m^l (n-1)^{m-l} d_{l,m})$ полиномиальные решения n -й степени

$$P_{n,m}(\theta_m) = \alpha_{n,n} \sum_l^{0, n} (-1)^l \frac{N_{l,m,n}}{\prod_i \lambda_{n,m;i}} \theta_m^{n-l}, \quad (2,4)$$

$$\theta_m = x_1 x_2 \dots x_m, \quad \theta_1 = x_1 \equiv t, \quad \lambda_{n,m;k} = \lambda_{n,m} + a_{n,m;k},$$

$$a_{n,m;k} = (n-k)^m \left(a_m (n-k-1)^m + \sum_l^{1, m} C_m^l (n-k-1)^{m-l} d_{l,m} \right),$$

$$k = 1, 2, \dots, n,$$

$$N_{l,m,n} = b_{l-1,m,n} N_{l-1,m,n} - c_{l-2,m,n} N_{l-2,m,n} + \lambda_{n,m,i-2},$$

$$N_{1,m,n} = b_{0,m,n} = n^m \left(b_m (n-1)^m + \sum_l^{1, m} C_m^l f_{l,m} (n-1)^{m-l} \right), \quad N_{0,n,m} = 0,$$

$$b_{k,m,n} = b_m (n-k)^{2m}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$c_{s,m,n} = c_m (n-s)^m (n-s-1)^m, \quad s = 0, 1, \dots, n-2.$$

При $m = 1$ и соответствующем выборе коэффициентов a_1, b_1, c_1, d_{11} и $d_{1,m}$, получаются все «классические» полиномы⁽²⁹⁾. В частности, поливолновые уравнения (2,1), соответствующие значениям $a_m = -1, b_m = 0, c_m = 1, d_{1,m} = 2^m a_m, b_{1,m} = 0$, самосопряженные, и получаемые таким образом поливолновые полиномы имеют лишь действительные нули в открытом гиперпрямоугольнике $R_m = \{-1 \leq x_i \leq +1, i = 1, 2, \dots, m\}$ и обладают некоторыми общими с классическими полиномами Лажандра свойствами. Соответствующие этим нулям гиперповерхности разделяют гиперпрямоугольник R_m на 2^{m+1} или же $2^m(n+1)$ подобластей, смотря по тому, будет ли рассмотренный поливолновой полином четной или нечетной степени.

Вопросы определения областей и весовых функций ортогональности некоторых систем определенных выше поливолновых полиномов, соответствующих, например, хотя бы частично, рамкам исследований, помещенных в известной книге Н. И. Ахизера⁽³⁰⁾, а также принадлежность некоторых систем исследуемых полиномов к системам Чебышева⁽³¹⁾ печатаются в ряде заметок в «Известиях Ясского политехнического института».

Авторы посвящают эту работу академику И. Н. Векуа.

Университет провинции Альберта
Эдмонтон, Канада

Поступило
31 III 1972

Яский политехнический институт
Румыния

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ju. M. Berežanski, Am. Math. Soc. Trans. Monographs, Ch. IV, 1968, p. 756, 787. ² И. Н. Векуа, Вестн. АН СССР, № 11, 76 (1956). ³ G. Birkhoff, In: Approximations with Special Emphasis on Spline Functions, N. Y., 1969, p. 209. ⁴ W. Gordon, In: Approximations with Special Emphasis on Spline Functions, N. Y., 1969, p. 236. ⁵ F. Manaresi, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 24, 1954, p. 163, 343. ⁶ M. N. Oğuztöreli, Atti Accad. Sci. Torino, 105, 759 (1970—1971). ⁷ M. Salvadori, Ann. Scuola Norm. Pisa, 5, 51 (1936). ⁸ D. Mangeron, Rend. Accad. Naz. dei Lincei, (6), 16, 305 (1932); Rend. Accad. Sci. Fis., Mat., Napoli, (4), 2, 29 (1932). ⁹ D. Mangeron, Giorn. Mat. Battaglini, Napoli, 71, 89 (1933). ¹⁰ D. Mangeron, C. R., 266A, 870, 976, 1050, 1103, 1121 (1968); 204, 1037, 1022 (1937). ¹¹ D. Mangeron, Bull. Polytechn. Inst. Jassy, 2, 89 (1947); 3, 153 (1948). ¹² D. Mangeron, J. Math. Anal. and Appl., 9, 141 (1964). ¹³ D. Mangeron, M. N. Oğuztöreli, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 67, 1488 (1970). ¹⁴ M. N. Oğuztöreli, Rend. Accad. Naz. dei Lincei, 8, in press. ¹⁵ M. N. Oğuztöreli, S. Easwaran, ibid. 50, 650 (1971). ¹⁶ D. Mangeron, L. E. Krivosheina, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 33, 226 (1963); 34, 344 (1964); 35, 341 (1965). ¹⁷ M. N. Oğuztöreli, D. Mangeron, Bull. Acad. R. Sci., Belgique (5), 56, 267 (1970). ¹⁸ M. N. Oğuztöreli, D. Mangeron, Rend. Accad. Naz. dei Lincei, (8), 44, 1; 45, 74, 120 (1968). ¹⁹ M. Picone, Ann. Sci. Univ. Jassy, 26, 1, 182 (1940). ²⁰ M. Picone, Annuario Accad. dei, 60, 1 (1968). ²¹ Л. Е. Кривошеина, Тр. III Сибирск. конф. матем. мех., Томск, 1964. ²² D. Mangeron, L. E. Krivosheina, Rev. Roumaine Sci. Techn., Méc. Appl., 9, 1195 (1964); 10, 3 (1965); 11, 3 (1966). ²³ S. Easwaran, A Study on Certain Higher Order Partial Differential Equations of Mangeron. Doctoral Dissertation, Univ. of Alberta, Dept. Math., 1972. ²⁴ D. Mangeron, L. E. Krivosheina, Studii Cercetari Mat., Acad. RSR, 16, 967 (1964). ²⁵ М. Н. Огюзторели, Д. И. Манжерон, ДАН, 196, 293, 523 (1971). ²⁶ M. Marden, Geometry of Polynomials, Am. Math. Soc., 1966. ²⁷ Б. А. Бондаренко, Полигармонические полиномы, Ташкент, 1968. ²⁸ Д. Т. Гребенюк, Полиномы наилучшего приближения по многим переменным, Ташкент, 1970. ²⁹ I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, Fourth Ed., Prepared by Yu. V. Geronimus, M. Yu. Tseytlin. Transl. from Russian, N. Y.—London, 1965. ³⁰ N. I. Akhiezer, The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis. Transl. from Russian, Edinburg—London, 1965. ³¹ S. Karlin, W. J. Studden, Chebyscheff Systems: With Applications in Analysis and Statistics, N.—Y., 1966.